UNIVERSITY OF HAWAI
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

58. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT
MIT 4 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM DEZEMBER 1954)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1954

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Möllerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

58. Band/4. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Horninger, H. Über Konchoidenschraublinien und die durch Konchoidenschraubung erzeugbaren Regelschraubflächen 225

Helmberg, G. Strukturbeziehungen zwischen endlicher Gruppe, Gruppenring und irreduziblen Darstellungen 241

Bukovics, E. Beiträge zur numerischen Integration III. 258

Gröbner, W. Die birationalen Transformationen der Polynomideale 266

Hlawka, E. Zur Theorie der Überdeckung durch konvexe Körper 287

Hlawka, E. Inhomogene Minima von Sternkörpern 292

Buchbesprechungen 306

Über Konchoidenschraublinien und die durch Konchoidenschraubung erzeugbaren Regelschraubflächen.

Von

H. Horninger, Istanbul.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingelangt am 1. Juni 1954.)

Unter den an anderer Stelle beschriebenen Trochoidenschraubungen[1] nimmt die Bewegung $\mathfrak{R}$, deren Grundriß eine Konchoidenbewegung ist und die daher *Konchoidenschraubung* genannt werden möge, insoferne eine Sonderstellung ein, als durch sie *gerade Regelschraubflächen* erzeugbar sind. Die charakteristischen Eigenschaften der als *Konchoiden-* oder *Kardioidenschraublinien* bezeichneten Punktbahnen von $\mathfrak{R}$ können aus den a. a. O. abgeleiteten Eigenschaften beliebiger Trochoidenschraublinien unmittelbar erschlossen werden; hiebei ergibt sich u. a. ein Zusammenhang zwischen Kardioidenschraublinien und den Trochoidenschraublinien, deren Grundrisse *Steiner'sche Hypozykloiden* sind, sowie zwischen Konchoidenschraublinien und den *exzentrischen Schraublinien einer geraden Kreisschraubfläche.* Jede gerade Regelschraubfläche γ trägt ∞^3 Konchoidenschraublinien; die ∞^2 (im Falle einer Wendelfläche mit den exzentrischen Schraublinien derselben identischen) *Fußpunktkurven von* γ sind in dieser Mannigfaltigkeit enthalten. Je ∞^1 Konchoidenschraublinien von γ sind einander kongruent und lassen sich i. a. zu *zwei verschiedenen Scharen* derart zusammenfassen, daß je zwei Kurven derselben Schar durch die γ erzeugende Schraubung ineinander übergeführt werden können; im Falle der Fußpunktkurven sind beide Scharen in einer einzigen vereinigt. Jede Konchoidenschraublinie kann als *Gesamtschnitt zweier gerader Regelschraubflächen* mit zueinander parallelen

[1] *H. Horninger,* Über Trochoidenschraublinien und die durch Trochoidenschraubung erzeugbaren Kreisschraubflächen; Mh. f. Math., Bd. 58, S. 193—212 (1954).

Achsen gewonnen werden, Paare konjugierter Kurven bilden den Gesamtschnitt je einer solchen Fläche mit einer *geraden Kreisschraubfläche* oder einer *Drehfläche*. Schließlich folgt aus der Tatsache, daß jede Konchoidenschraublinie k Basiskurve eines *Büschels gerader Regelschraubflächen* ist, ein Zusammenhang mit bekannten Sätzen der Zyklographie: Die festen Polzylinder der beiden Trochoidenschraubungen, durch die k erzeugbar ist, tragen *je eine bizirkulare Quartik*, die den Grundriß von k zur zyklographischen Bildkurve besitzt; im Falle einer Kardoidenschraublinie sind beide Quartiken identisch.

Nr. 1. Konchoiden- und Kardioidenschraublinien.

Wenn der Drehzylinder Δ ($a \perp \pi_1$; r_1) auf dem Drehzylinder $\Gamma(f//a$; $e_1 = r_1/2$) derart schrotet, daß jeder Punkt A von a eine auf Γ liegende Euklidische Schraublinie l durchläuft, so vollführt das durch Δ repräsentierte System eine Bewegung $\mathfrak{R}$, deren Grundriß eine Konchoidenbewegung $\mathfrak{R}'$ ist und die daher als *Konchoidenschraubung* definiert werden möge. Wir bezeichnen den Parameter von l mit p_1 und den Drall von $\mathfrak{R}$ (d. h. den Parameter aller berührenden Schraubungen von $\mathfrak{R}$) mit d_1; aus $r_1 = 2\,e_1$ folgt $d_1 = 2\,p_1$ [2]. Die Bahnen k, c aller der Bewegung $\mathfrak{R}$ unterworfenen Punkte P, Q seien *Konchoidenschraublinien* oder *Kardioidenschraublinien* genannt, je nachdem ihre Grundrisse *Pascal*'sche Kurven allgemeiner Art k' oder Kardioiden c' sind; im ersten Fall besitzt der Bahnradius $\overline{Pa}$ von k einen von r_1 verschiedenen Wert h_1, im zweiten Fall ist $h_1 = r_1$. Wählt man P, wie dies im Folgenden stets vorausgesetzt ist, in derselben Höhe über π_1 wie A, so ist die mit A inzidente Schraublinie l (f; p_1) die der Bahn k von P in $\mathfrak{R}$ zugeordnete Leitlinie; f ist gemeinsame Achse von l und k. Die den Grundriß von k darstellende *Pascal*'sche Kurve k' besitzt einen auf l' liegenden Doppelpunkt d', die mit d' inzidenten Erzeugende d von Γ schneidet demnach jeden Gang von k in zwei Punkten; wir bezeichnen sie kurz als *Hauptsekante* von k. Da k' zugleich Bahn einer symmetrischen Kreisrollung $\mathfrak{S}'$ ist, so erweist sich die Trochoidenschraubung, die mit $\mathfrak{R}$ in der Bahn k übereinstimmt, als eine *symmetrische Zylinderschrotung* $\mathfrak{S}$ vom Drall $d_2 = p_1$; die k in $\mathfrak{S}$ zugewiesene Leitlinie s besitzt die Achse f, den Parameter $p_2 = d_1 = 2\,p_1$ und den Radius $e_2 = h_1$ (vgl. „T", Nr. 1,

[2] Vgl. die in Fußn. 1 zit., im Folgenden stets durch „T" bezeichnete Abh., Gl. 10, a.

insbes. Gl. 7 und 11). D. h.: *Zwei koachsiale Schraublinien vom Parameterverhältnis* 1 : 2 *können stets als Leitlinien einer Konchoidenschraublinie angesehen werden; falls auch ihr Radienverhältnis* 1 : 2 *ist, bestimmen sie eine Kardioidenschraublinie.* Die zu den Parameterpunkten O_1, O_2 von k gehörigen Drehfluchtlinien der Tangentenfläche von k sind zwei *Pascal*sche Kurven, die einander in einer zentrischen Verdoppelung entsprechen usw. (vgl. „T", Satz 1).

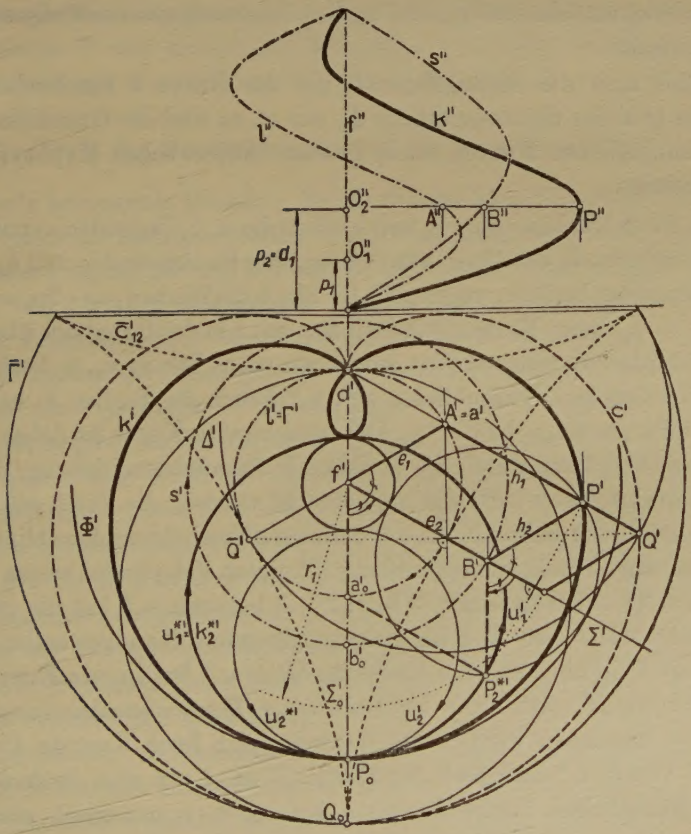

Abb. 1.

Die zu $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$ *konjugierten Bewegungen* $\overline{\mathfrak{K}}$, $\overline{\mathfrak{S}}$ sind durch die Leitlinie l und den Drall $-d_1$ (bzw. s und $-d_2$) definiert ($\overline{\mathfrak{K}}$ entsteht, wenn Δ auf einem mit Γ koachsialen Drehzylinder $\overline{\Gamma}$ schrotet); die Radien der Polzylinder von $\overline{\mathfrak{K}}$, $\overline{\mathfrak{S}}$ stehen im Verhältnis 2 : 3, bzw. 1 : 3 (vgl. „T",

Gl. 17, 18ff.). Die Grundrisse beider Bewegungen sind daher die Kreisrollungen, deren gespitzte Bahnkurven *Steiner'sche Hypozykloiden* sind. Da jede Trochoidenschraublinie $\bar{c}$, die eine solche Kurve $\bar{c}'$ zum Grundriß hat, im Sinne obiger Definition zu einer Kardioidenschraublinie c konjugiert ist, so gilt

Satz 1: *Jede Trochoidenschraublinie $\bar{c}$, die im Grundriß durch eine Steiner'sche Hypozykloide dargestellt wird, ist zu einer Kardioidenschraublinie konjugiert*[3]; *Trochoidenschraublinien, deren Grundrisse durch dieselbe Kreisrollung entstehen wie $\bar{c}'$, sind zu Konchoidenschraublinien allgemeiner Art konjugiert.*

Wählt man die Anfangslage Q_0 des die Kurve c beschreibenden Punktes Q in der Symmetrieebene Σ_0 von c', so sind die Grundrisse der zu c konjugierten Kurven $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ in *einer Steiner*'schen Hypozykloide $\bar{c}_{12}'$ vereinigt.

Die *Ur-Schraublinien* u_1, u_2 von k haben die in Σ_0 liegenden vertikalen Treffgeraden a_0, b_0 von l bzw. s zu Achsen; ihre Radien sind h_1 und $h_2 = e_1$, ihre Parameter besitzen wegen „T", Gl. 22a, b die Werte $q_1 = -2p_1 = -p_2$, bzw. $q_2 = p_2$. Beide Kurven stimmen also mit s in der Ganghöhe überein, u_2 ist überdies im gleichen Sinn gewunden wie s. Die zu u_1, u_2 bezüglich Σ_0 symmetrischen Schraublinien u_1^*, u_2^* haben die Radien h_1 bzw. h_2 und die Parameter p_2 bzw. $-p_2$. Die erstgenannte Kurve ist daher *mit s kongruent* und kann durch die horizontale Parallelverschiebung, die a_0 in f überführt, mit s zur Deckung gebracht werden; die durch die Leitlinie l und die Ur-Schraublinie u_1^* definierte Trochoidenschraublinie k_1^* ist Bahn einer Trochoidenschraubung $\mathfrak{R}^*$, deren Polzylinder wegen „T", Gl. 27, a, 28, a die Radien $e_1/3$ bzw. $2e_1/3$ besitzen. u_2^* hat die gleiche Ganghöhe wie s, ist aber im entgegengesetzten Sinn gewunden; die durch die Leitlinie s und die Ur-Schraublinie u_2^* bestimmte Kurve k_2^* kann wegen „T", Gl. 25, b als *Bahn einer Trochoidenschraubung vom Drall* ∞ angesehen werden. Da je zwei gleich hoch liegende Punkte P, P_2^* von k, k_2^* bezüglich der Ebene Σ, die f mit dem in derselben Höhe befindlichen Punkt B von s verbindet, symmetrisch sind, so bewirkt die aus der erwähnten Parameterbeziehung folgende Gleichheit der Winkel $\Sigma_0 \hat{\Sigma}$ und $\Sigma \hat{[BP]}$, daß $[BP_2^*]$ zu Σ_0 parallel ist. P_2^* geht also aus B durch die horizontale Parallelverschiebung hervor, die f in a_0

[3] Durch diese Beziehung erfährt der bei *H. Wieleitner* (Spezielle ebene Kurven; Leipzig 1908, Nr. 100) beschriebene Zusammenhang zwischen Kardioiden und *Steiner*'schen Hypozykloiden eine zusätzliche Deutung.

überführt; d. h. k_2^* ist *mit der Schraublinie* u_1^* *identisch.* Dies zeigt, daß in besonderen Fällen *durch Trochoidenschraubungen auch Euklidische Schraublinien mit parallelen Achsen erzeugbar sind.*

Die mit P inzidente gerade Kreisschraubfläche Φ, deren Mittenlinie s ist, trägt sowohl k als auch k_2^*, die letztgenannte Kurve ist daher eine *exzentrische Schraublinie von* Φ[4]. Da k und k_2^* überdies, wie in „T", Nr. 5 bewiesen, einer mit Φ koachsialen Drehfläche Ψ angehören, so ergibt sich als Sonderfall von Satz 5, a jener Abh.

Satz 2: *Wenn eine gerade Kreisschraubfläche* Φ *und eine mit ihr koachsiale Drehfläche* Ψ *eine Euklidische Schraublinie gemeinsam haben, so ist der Restschnitt von* Φ *und* Ψ *eine Konchoidenschraublinie.*

Nr. 2. Die Konchoidenschraublinien einer Wendelfläche.

Jede horizontale Gerade t, die die Schraublinie l im Punkte A trifft, wird durch die Konchoidenschraubung $\mathfrak{R}$ auf einer Regelfläche ω geführt, die l zur Leitlinie hat und horizontale Richtebene besitzt. Da der Grundriß t' von t bei der Bewegung $\mathfrak{R}'$ beständig durch den von A' verschiedenen Schnittpunkt z' von t' und l' läuft, so ist die Gerade $z = z' \perp \pi_1$ gleichfalls eine Leitlinie von ω, d. h. ω ist eine *Wendelfläche* mit der Achse z, auf der l exzentrische Schraublinie ist; der Parameter von ω ist doppelt so groß wie der Parameter p_1 von l, nach dem in Nr. 1 Gesagten also gleich dem Drall d_1 von $\mathfrak{R}$. *Jede exzentrische Schraublinie einer Wendelfläche* ω *kann somit als Leitlinie einer Konchoidenschraubung angesehen werden, die* ω *zur Bahnfläche hat.* Da es ∞^2 solcher Kurven gibt und die durch je zwei derselben bestimmten Konchoidenschraubungen voneinander verschieden sind, so erkennt man ω als *gemeinsame Bahnfläche von* ∞^2 *derartigen Bewegungen.* l ist zugleich die *Fußpunktkurve* von ω in Bezug auf jeden Punkt der Geraden i, die z bezüglich der Achse von l symmetrisch gegenüberliegt[5]. Alle mit t gleich hoch liegenden Treffgeraden t_i von l durchlaufen die mit ω kongruenten Wendelflächen, deren Achsen die Erzeugenden z_i des mit l inzidenten Drehzylinders Γ sind. Die allen Wendelflächen gemeinsame Schraublinie l kann demnach

---

[4] Die exzentrischen Schraublinien einer geraden Kreisschraubfläche Φ sind bekanntlich mit der Mittenlinie von Φ kongruent; der Abstand ihrer Achse von der Flächenachse ist gleich dem Radius der Kreisschnitte von Φ; vgl. *E. Müller*: Über Schiebflächen, deren eine Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht (Sitz.-Ber. Ak. d. Wiss. Wien, IIa, 1909).

[5] Vgl. *E. Müller-J. Krames*: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. III, Konstruktive Behandlung der Regelflächen, Nr. 21.

als *Basiskurve dieses Flächenbüschels* oder auch als *Gesamtschnitt zweier Büschelflächen* angesehen werden, (dies ist der räumliche Ausdruck der Tatsache, daß der Scheitel eines in seiner Ebene bewegten starren Winkels, dessen Schenkel durch zwei feste Punkte gleiten, einen Kreis beschreibt).

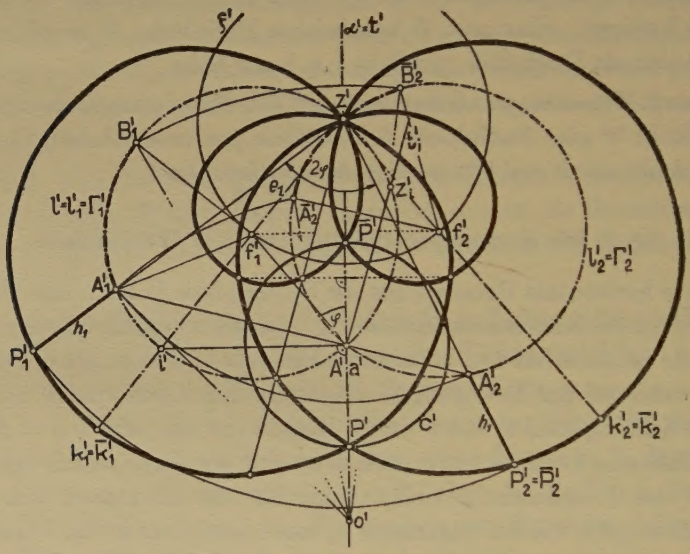

Abb. 2.

Je zwei durch denselben Radius e_1 bestimmte Schraublinien l_1, l_2 von ω sind kongruent; ihre Achsen f_1, f_2 gehören dem Drehzylinder $\zeta\,(z; e_1)$ an und liegen bezüglich einer Ebene α des Büschels z symmetrisch. l_1 kann mit l_2 durch die Euklidische Schraubung $\mathfrak{E}\,(z; d_1)$, deren Bahnfläche ω ist, überdies aber auch durch ∞^2 Schraubungen, deren Achsen *die vertikalen Geraden von* α sind, zur Deckung gebracht werden. Bezeichnet a die von z verschiedene Schnittgerade der Ebene α mit dem durch l_1 oder l_2 laufenden Drehzylinder Γ_1, bzw. Γ_2 und φ den Winkel $\hat{f_1'a'z'}$, so besitzt der Höhenunterschied je zweier Punkte A_1, A_2 von l_1, l_2, die durch $\mathfrak{E}$ ineinander überführbar sind, den Wert $2\,d_1\,\varphi$; die Punkte A_1, A_2 gehören einer durch a laufenden Ebene an. Um l_1 durch eine Schraubung mit l_2 zur Deckung zu bringen, deren Achse eine vertikale Gerade o von α ist, genügt es wegen der Kongruenz von l_1, l_2, durch eine solche Bewegung die Achse f_1 und irgendeinen Punkt A_1 von l_1 mit der Achse f_2 und einem beliebigen Punkt $\overline{A}_2$ von l_2 zur Inzidenz

kommen zu lassen. Die Symmetrieebene der Strecke $A'_1\overline{A}_2'$ schneidet α in der Geraden o; die Schraubung um o, die A_1 in den Punkt $\overline{A}_2$ gelangen läßt, führt *jeden* Punkt B_1 von l_1 in einen Punkt $\overline{B}_2$ von l_2 über. Da es auf l_2 unendlichviele Punkte gibt, die $\overline{A}_2'$ zum Grundriß haben, so gibt es *unendlichviele Schraubungen mit der Achse o, die l_1 mit l_2 zur Deckung bringen.*

Jeder von A verschiedene Punkt P der Geraden t durchläuft bei der durch $l = l_1$ bestimmten Konchoidenschraubung $\mathfrak{R}$ eine auf ω liegende Konchoidenschraublinie k_1, deren Hauptsekante die Achse von ω ist. l_1 ist eine Leitlinie von k_1, der Abstand $\overline{AP}$ stellt den Bahnradius h_1 von k_1 dar. Da jede Konchoidenschraublinie im Sinne der eingangs gegebenen Definition Bahn einer einzigen Konchoidenschraubung ist, so erweist sich ω als *Trägerfläche von ∞^3 Konchoidenschraublinien*; je ∞^1 derselben sind die Bahnen aller Punkte von t bei einer der ∞^2 Konchoidenschraubungen, durch die ω erzeugbar ist. Alle Kurven stimmen in ihrer Hauptsekante überein; je ∞^1 durch das gleiche Radienpaar e_1, h_1 definierte Kurven sind kongruent. Unter den ∞^1 Konchoidenschraublinien, die die Punkte von t bei der Bewegung $\mathfrak{R}$ durchlaufen, befindet sich *eine* mit k_1 kongruente Kurve $\bar{k}_1$; der Punkt $\overline{P}$, dessen Bahn sie ist, gehört dem Kreis $c\,(A; h_1)$ der Ebene $[A \perp a)$ an. M. a. W.: *Trägt man auf den Erzeugenden einer Wendelfläche ω von den Punkten einer exzentrischen Schraublinie der Fläche aus eine konstante Strecke h_1 in bestimmtem Sinn ab, so erhält man eine Konchoidenschraublinie.* Trägt man h_1 nach beiden Seiten ab, so entstehen *zwei kongruente, gegeneinander um die halbe Ganghöhe von ω versetzte Konchoidenschraublinien*; die Grundrisse beider Kurven sind in einer einzigen *Pascal*'schen Kurve vereinigt. Da sowohl k_1 als auch $\bar{k}_1$ der Schraubfläche Φ angehört, die c bei der Bewegung $\mathfrak{R}$ beschreibt, so können wir feststellen:

Satz 3: *Wenn die Mittenlinie einer geraden Kreisschraubfläche Φ exzentrische Schraublinie einer Wendelfläche ω ist, so besteht der Gesamtschnitt $[\Phi\ \omega]$ aus zwei kongruenten Konchoidenschraublinien, die einander im Grundriß decken.*

Die Kurven k_1, $\bar{k}_1$ können durch die Euklidische Schraubung $\mathfrak{E}$, deren Bahnfläche ω ist, *nicht* ineinander übergeführt werden. Die mit k_1 kongruenten Konchoidenschraublinien von ω bilden daher *zwei einparametrige Scharen*, wobei nur Kurven der gleichen Schar durch die Schraubung $\mathfrak{E}$ miteinander zur Deckung gebracht werden können. Je zwei Kurven k_1, $\bar{k}_2$ aus verschiedenen Scharen sind infolge ihrer Kongruenz gleichfalls durch Schraubung ineinander überführbar; da die Kurven

periodisch sind, kann man k_1 sogar durch unendlich viele Schraubungen mit $\bar{k}_2$ zur Inzidenz bringen. Die Achse jeder solchen Bewegung $\overline{\mathfrak{E}}$ ist z; zur Bestimmung ihres Parameters $\bar{p}$ denken wir k_1 durch die Schraubung $\mathfrak{E}$ mit der Kurve k_2 zur Deckung gebracht, deren Grundriß mit dem von $\bar{k}_2$ zusammenfällt und hierauf k_2 durch Vertikalverschiebung um die Strecke $(1 + 2n)\, d_1 \pi$ in $\bar{k}_2$ übergeführt (n eine ganze Zahl); jeder Punkt P_1 von k_1 geht durch $\mathfrak{E}$ in einen Punkt P_2 von k_2 über, der durch die Verschiebung in den Punkt $\overline{P}_2$ von $\bar{k}_2$ fällt. Bezeichnen wir den Winkel $\hat{P_1'z'P_2'}$ durch 2φ, so folgt für $\bar{p}$ der Wert $(1 + \frac{1+2n}{2\varphi}\pi)\, d_1$.

In analoger Weise beweist man, daß k_1 mit k_2 durch jede Schraubung zur Deckung gebracht werden kann, deren Achse z ist und deren Parameter den Wert $(1+n\pi/\varphi)\, d_1$ besitzt; für $n = 0$ ergibt sich $\mathfrak{E}$.

Nr. 3. Die Konchoidenschraublinien einer geraden, offenen Regelschraubfläche.

Jede horizontale Gerade g, die der durch die Leitlinie l_1 bestimmten Konchoidenschraubung $\mathfrak{K}_1$ unterworfen wird, durchläuft eine Regelfläche γ mit horizontaler Richtebene. Die mit g gleich hoch liegende, zu g parallele Treffgerade t von l_1 erzeugt bei derselben Bewegung eine Wendelfläche ω, deren Achse z dem mit l_1 inzidenten Drehzylinder $\Gamma_1\,(f_1; e_1)$ angehört; γ ist daher eine *gerade, offene Regelschraubfläche* mit der Achse z, deren Kehlschraublinie q den Radius $r = \overline{gt}$ besitzt und deren Parameter dem von ω gleich ist. Da die Gerade g durch *jede* Konchoidenschraubung, die ω erzeugt, auf der Fläche γ geführt wird, so ist γ ebenso wie ω *gemeinsame Bahnfläche von* ∞^2 *Konchoidenschraubungen* und daher *Trägerfläche von* ∞^3 *Konchoidenschraublinien*; die Achse von γ schneidet alle Leitlinien dieser Bewegungen[6].

Sei k_1 die Bahn eines willkürlichen Punktes P_1 von g und l_1 die ihr in der Bewegung $\mathfrak{K}_1$ zugewiesene Leitlinie; die Ebene $\pi = P_1 \perp f_1$ schneidet l_1 im Punkte A_1. Der Bahnradius $h_1 = \overline{A_1P_1}$ von k_1 ist mit dem Radius r von q und dem Winkel α, den t mit der Geraden $t_1 = [A_1P_1]$ bildet, durch Gl.

$$\sin \alpha = r : h_1 \tag{1}$$

[6] Schiefe Regelschraubflächen sind durch Konchoidenschraubungen nicht erzeugbar, weil die Vertikalverschiebung, die eine gegenüber π_1 geneigte Gerade durch die Bewegung $\mathfrak{K}_1$ erfährt, dem zugehörigen Drehungswinkel nicht proportional ist.

verbunden; t_1 trifft Γ_1 außer in A_1 noch in einem Punkt der Hauptsekante d_1 von k_1. Alle mit k_1 kongruenten Kurven von γ stimmen mit k_1 im Radienpaar e_1, h_1 überein; die Achsen aller dieser Kurven gehören dem Drehzylinder $\zeta\,(z; e_1)$ an. Jede Erzeugende f_n von ζ ist Achse eines mit z inzidenten Drehzylinders Γ_n, der eine exzentrische Schraublinie l_n von ω enthält und die Gerade t in einem einzigen, nicht auf z liegenden Punkt A_n von l_n trifft. Der Kreis $c_n\,(A_n; h_1)$ der Ebene π schneidet g in den Punkten P_n, $\overline{P}_n$; die Kurven k_n, $\bar{k}_n$, die diese Punkte bei der durch l_n bestimmten Bewegung $\mathfrak{R}_n$ beschreiben, sind die mit k_1 kongruenten Konchoidenschraublinien von γ, deren Achse f_n ist. Da beide Kurven überdies auf der Schraubfläche Φ liegen, die l_n zur Mittenlinie und c_n zum Normalschnitt besitzt, so gilt

Satz 4: *Wenn die Mittenlinie einer geraden Kreisschraubfläche Φ demselben Drehzylinder angehört wie die Achse einer geraden, offenen Regelschraubfläche γ, deren Parameter doppelt so groß ist wie der von Φ, so besteht der Gesamtschnitt $[\Phi\gamma]$ aus zwei kongruenten Konchoidenschraublinien.*

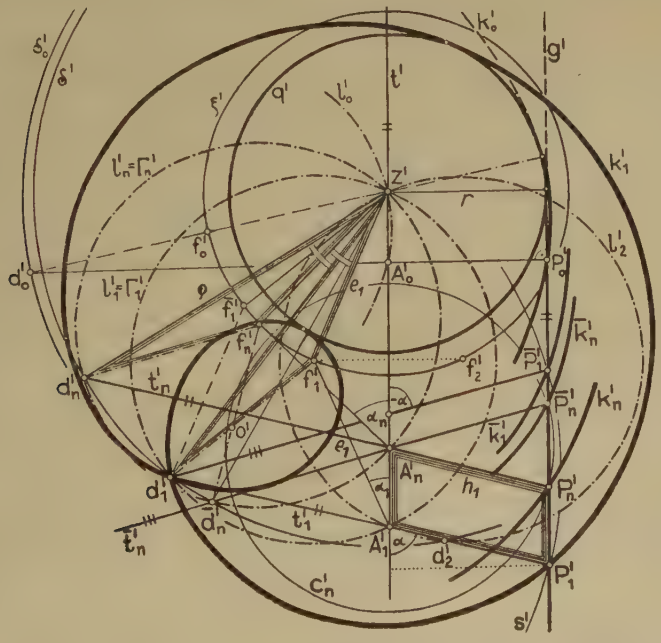

Abb. 3.

Die Gerade $t_n = [A_n P_n]$ ist zu $t_1 = [A_1 P_1]$ parallel, ihr von A_n verschiedener Durchstoßpunkt mit Γ_n liegt auf der Hauptsekante d_n von

k_n. Da die Punkte d_n', A_n', z' dem Kreis Γ_n' angehören, so ist der Winkel $\widehat{d_n' f_n' z'}$ gleich $2\,\alpha$; der Abstand $\varrho = \overline{d_n' z'}$ ist gleich $2\,e_1 \sin\alpha = \dfrac{2\,e_1 r}{h_1}$, also *konstant für alle mit k_1 kongruenten Kurven von γ*. Die Hauptsekanten dieser Kurven sind demnach die *Erzeugenden des Drehzylinders* $\delta\,(z;\varrho)$. Bezeichnet man die Winkel $\widehat{f_1' A_1' z'}$ bzw. $\widehat{f_n' A_n' z'}$ durch α_1, α_n, so kann man sowohl $\widehat{f_1' z' f_n'}$ als auch $\widehat{d_1' z' d_n'}$ durch $\alpha_n - \alpha_1$ ausdrücken; d. h. die Dreiecke $f_1' d_1' z'$, $f_n' d_n' z'$ sind *gleichsinnig kongruent* und lassen sich durch die Drehung $\mathfrak{D}'\,(z';\alpha_n - \alpha_1)$ miteinander zur Deckung bringen. Betrachten wir die Geraden f_1, d_1 als gegeben und sehen die erste als Achse, die zweite als Hauptsekante einer auf γ liegenden Konchoidenschraublinie an, so ergibt sich zunächst der auf t liegende Punkt A_1 der Leitlinie dieser Kurve als der mit z nicht inzidente Durchstoßpunkt von t mit dem Drehzylinder $\Gamma_1\,(f_1; \overline{f_1 d_1} = e_1)$ und hiedurch der auf g befindliche Punkt der gesuchten Kurve im Schnitt von g mit der Ebene $\tau_1 = [d_1 A_1]$; d. h. diese Kurve ist *mit k_1 identisch*. Hieraus folgt: 1. Jede auf γ liegende Konchoidenschraublinie ist durch Angabe *ihrer Achse und ihrer Hauptsekante eindeutig bestimmt*. 2. Können Achse und Hauptsekante zweier Konchoidenschraublinien von γ durch die Schraubung $\mathfrak{S}$, deren Bahnfläche γ ist, miteinander zur Deckung gebracht werden, so sind auch *die Kurven selbst durch diese Schraubung ineinander überführbar*. Die von d_1 verschiedene Erzeugende d_2 des Zylinders δ, die der Ebene τ_1 angehört, ist Hauptsekante einer mit k_1 kongruenten Kurve k_2, die gleichfalls durch die Schraubung $\mathfrak{S}$ mit k_1 zur Deckung gebracht werden kann; ihre Achse f_2 liegt f_1 bezüglich der Ebene $[tz]$ symmetrisch gegenüber, ihre Leitlinie l_2 enthält A_1.

Die Gerade $\bar{t}_n = [A_n \bar{P}_n]$ schließt mit t den Winkel $-\alpha$ ein, ihr von A_n verschiedener Durchstoßpunkt mit Γ_n liegt auf der Hauptsekante von $\bar{k}_n$, d. h. einer Erzeugenden $\bar{d}_n$ von δ. Die Achse von $\bar{k}_n$ deckt sich mit der Achse f_n von k_n, die Dreiecke $f_1' d_1' z'$, $f_n' \bar{d}_n' z'$ sind *ungleichsinnig kongruent* und können daher nicht durch Drehung um z' ineinander übergeführt werden. D. h.: Die Kurven k_1, $\bar{k}_n$ können *nicht durch die Schraubung* $\mathfrak{S}$, sondern nur durch eine Schraubung, deren Achse die Schnittgerade o der Ebenen $[f_1 d_1]$, $[f_n \bar{d}_n]$ ist, miteinander zur Deckung gebracht werden. Da die Punkte A_1, P_1, A_n, P_n ein Parallelogramm, die Punkte A_1, P_1, A_n, $\bar{P}_n$ aber ein gleichschenkliges Trapez bilden, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 5: *Alle einander kongruenten Konchoidenschraublinien einer geraden, offenen Regelschraubfläche γ bilden zwei einparametrige Scharen; Kurven derselben Schar können durch die γ erzeugende Schraubung $\mathfrak{E}$ ineinander übergeführt werden, Kurven verschiedener Scharen nur durch Schraubungen, die von $\mathfrak{E}$ verschieden sind. Im ersten Fall bilden die auf jeder Erzeugenden von γ liegenden Punkte irgendzweier Kurven im Verein mit ihren Leitpunkten ein Parallelogramm, im zweiten Fall ein gleichschenkliges Trapez.*

Wenn die Dreiecke $f_n' d_n' z'$, $f_n' \bar{d}_n' z'$ in der Seite $\overline{f_n' z'}$ und daher auch in der Ecke f_n' übereinstimmen, so gehören die hiedurch definierten Kurven k_n, $\bar{k}_n$ der in Satz 4 genannten Kreisschraubfläche Φ an und können demnach durch *die Φ erzeugende Schraubung* miteinander zur Deckung gebracht werden. Zwei Dreiecke $f_1' d_1' z'$, $\bar{f}_1' d_1' z'$, die die Seite $\overline{d_1' z'}$ und daher auch die Ecke d_1' gemeinsam haben, bestimmen zwei Kurven k_1, $\bar{k}_1$, die durch *Drehung um* d_1 ineinander übergeführt werden können, weil die auf g liegenden Punkte P_1, $\bar{P}_1$ beider Kurven einem Kreis s mit der Achse d_1 angehören. Wir können somit als Seitenstück zu Satz 4 hervorheben:

Satz 6: *Jede Drehfläche, die eine auf der Regelschraubfläche γ liegende Konchoidenschraublinie k_1 enthält und die Hauptsekante von k_1 zur Achse hat, durchdringt γ außer in k_1 noch in einer mit k_1 kongruenten Kurve.*

Ferner erkennt man u. a., daß durch jeden Punkt von γ *vier* einander kongruente Konchoidenschraublinien der Fläche laufen, sowie daß auch stets je vier kongruente Kurven in einem Leitpunkt übereinstimmen; die Kurven gehören paarweise derselben Schar an. Usw.

Die Annahme $\alpha = \pi/2$ oder $h_1 = r$ führt auf eine Konchoidenschraublinie k_0, die zugleich eine *Fußpunktkurve* von γ ist; ihre Pole liegen auf der Hauptsekante d_0 von k_0. *Die zweiparametrige Mannigfaltigkeit aller Fußpunktkurven von γ ist demnach in der dreiparametrigen Mannigfaltigkeit der auf γ liegenden Konchoidenschraublinien enthalten*[7]. Alle mit k_0 kongruenten Kurven von γ bilden eine *einzige* einparametrige Schar, von der je zwei Kurven durch die Schraubung $\mathfrak{E}$ ineinander übergeführt werden können; der Hauptsekantenzylinder δ_0 dieser Kurven besitzt

[7] Durch diesen Satz wird ein Zusammenhang zwischen den Konchoidenschraublinien und den Fußpunktkurven von Drehhyperboloiden hergestellt, da sich letztere im Normalriß auf die Kreisschnittebenen der Hyperboloide bekanntlich gleichfalls als Pascal'sche Kurven darstellen; vgl. *E. Müller-J. Krames*, a. a. O., S. 132.

den Radius $2e_1$, das in Satz 5 genannte Parallelogramm wird zu einem Rechteck. Die in Satz 4 erwähnte Kreisschraubfläche ist ebenso wie die in Satz 6 definierte Drehfläche *der Fläche γ längs k_0 berührend umschrieben.*

Nr. 4. Schraubflächenbüschel.

Die Konchoidenschraublinie k sei gemäß Nr. 1 als gemeinsame Bahnkurve der Konchoidenschraubung $\mathfrak{K}$ und der symmetrischen Zylinderschrotung $\mathfrak{S}$ gegeben; die festen Polflächen beider Bewegungen sind die Drehzylinder $\Gamma(f \perp \pi_1; R_1)$ und $\Gamma_s(f; R_2)$. Die k in $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{S}$ zugewiesenen Leitschraublinien sind $l(f; e_1 = |R_1|, p_1)$ und $s(f; e_2 = 2R_2, p_2 = 2p_1)$; die Hauptsekante d von k liegt auf Γ. Jede horizontale Treffgerade t von k und l beschreibt in $\mathfrak{K}$ die *Wendelfläche* $\omega(d; d_1 = p_2)$, die l zur exzentrischen Schraublinie hat (vgl. Nr. 2); die auf t befindlichen Punkte P, A von k, l legen den Bahnradius $h_1 = \overline{AP}$ $(= e_2)$ fest, der k in der Bewegung $\mathfrak{K}$ zukommt. Jede horizontale Gerade g, die t in P unter einem bestimmten, während dieser Bewegung unverändert bleibenden Winkel α schneidet, wird durch $\mathfrak{K}$ auf einer *geraden, offenen Regelschraubfläche* γ geführt, der k angehört (vgl. Nr. 3). Die Achse der Fläche ist jene mit A nicht inzidente Erzeugende z von Γ, die die Gerade $\bar{g} = A//g$ schneidet, ihr Parameter ist gleich d_1; der erste scheinbare Umriß von γ ist der Kreis q' $(z'; r = h_1 \sin\alpha)$. Die Kehlschraublinie q von γ trifft k in jedem Gang in zwei Punkten P_1, P_2; die mit diesen Punkten inzidenten Erzeugenden t_1, t_2 von ω bilden mit den durch sie laufenden Erzeugenden g_1, g_2 von γ je eine Geradenpaar, das durch die Bewegung $\mathfrak{K}$ mit dem Paar t, g zur Deckung gebracht werden kann. Die Punkte P_1', P_2' gehören den durch d' laufenden Tangenten t_1', t_2' des mit q' konzentrischen Kreises vom Radius $\varrho = r \cdot \cos\alpha$ an; *k' berührt q' in den Punkten P_1, P_2 und hat daher mit diesem Kreis keine weiteren eigentlichen Punkte mehr gemeinsam*[8]. Aus diesen Beziehungen kann man folgern:

a) Die durch $\alpha = \pi/2$ bestimmte Fläche γ_0 hat die von d verschiedene, in der Symmetrieebene $\Sigma_0 = [df]$ von k' liegende Erzeugende z_0 von Γ

[8] Bezeichnet man den Winkel $\hat{tg}$ als positiv, wenn man t' im Uhrzeigersinn durch den Winkel $\alpha < \pi/2$ zu drehen hat, um g' zu erhalten, so kann man die beiden Schnittpunkte P_1', $\overline{P}_1'$ von t_1' und q' dadurch voneinander unterscheiden, daß der Schnittwinkel $t_1'\hat{q}'$ im Punkte P_1' positiv, in $\overline{P}_1'$ dagegen negativ ist; von den beiden Schnittpunkten der Geraden t_1', t_2' mit q' stellt also in der Tat nur je einer einen Schnittpunkt von k und q dar.

zur Achse, ihr Umrißkreis q_0' besitzt den Radius h_1. Die Bahn k von P ist die zu allen Punkten von d gehörige *Fußpunktkurve* von γ_0.

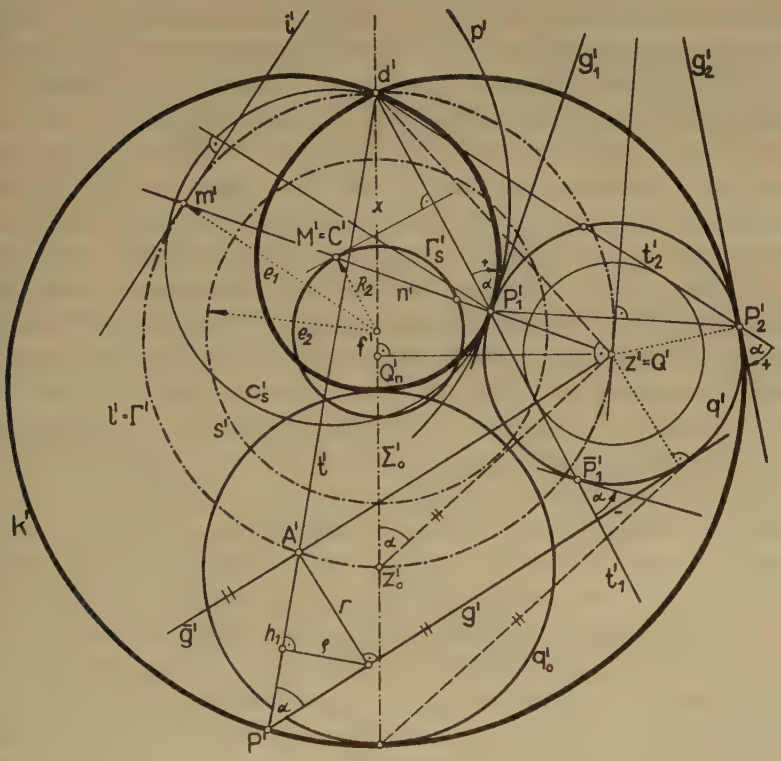

Abb. 4.

b) Die Bahnflächen γ, γ_1 je zweier beliebiger, mit P inzidenter Geraden g, g_1 haben k gemeinsam; da jede horizontale Ebene beide Flächen nach je einer einzigen Geraden schneidet, so stellt k den *Gesamtschnitt* $[\gamma\gamma_1]$ dar und wir gewinnen

Satz 7: *Zwei gerade, offene Regelschraubflächen von gleichem Parameter, deren Achsen zueinander parallel sind, durchdringen einander nach einer Konchoidenschraublinie.*

Eine der Flächen darf auch als Wendelfläche gewählt werden, die Durchdringung zweier Wendelflächen mit parallelen Achsen ist aber, wie in Nr. 2 erwähnt, eine exzentrische Schraublinie beider Flächen (Satz 7 kann als räumliche Deutung der bekannten Tatsache angesehen

werden, daß der Scheitel eines starren Winkels, dessen Schenkel beständig zwei Kreise berühren, eine *Pascal*'sche Kurve durchläuft).

c) Die Bahnflächen *aller* mit P inzidenten, horizontalen Geraden bilden ein *Büschel gerader, i. a. offener Regelschraubflächen*; k ist die *Basiskurve* des Büschels. Alle Büschelflächen besitzen den *gleichen Parameter*, ihre Achsen sind zueinander *parallel*; die Konchoidenschraublinien lassen sich somit den *Evolventenschraublinien* gegenüberstellen, weil jede solche Kurve bekanntlich die *Basis eines Büschels koachsialer, schiefer Regelschraubflächen von verschiedenen Parametern* ist[9]. Da der Umrißkreis q' jeder mit k inzidenten Fläche γ die den Grundriß von k bildende *Pascal*'sche Kurve k' doppelt berührt, so erweist sich k' als *Einhüllende der alle diese Flächen im Grundriß darstellenden Kreisschar.* Jeder Kreis q' der Schar besitzt einen auf dem Grundkreis $l' = \Gamma'$ von k' liegenden Mittelpunkt z' und ist durch Angabe dieses Punktes eindeutig bestimmt, da die Gerade $g' = P' \,//\, [A'\, z']$ eine Tangente von q' ist.

d) Betrachtet man q' als *zyklographisches Bild* eines bezüglich π_1 symmetrisch liegenden Punktepaares Q, $\overline{Q}$ von z, so kann man k' als *zyklographische Bildkurve einer bezüglich π_1 symmetrischen, auf Γ liegenden Kurve c* deuten; man beweist leicht, daß c eine *bizirkulare, rationale Quartik* ist, die d' zum *Doppelpunkt* hat. Der in Σ_0 befindliche Normalriß Q_n von Q besitzt nämlich in dem durch die Achsen d und $x = \Sigma_n'$ bestimmten rechtwinkligen Koordinatensystem die Ordinate r und, wie man dem Dreieck $d'\, Q'\, z_0'$ entnimmt, die Abszisse $x = 2\, e_1 \sin^2 \alpha$; der in Σ_0 liegende Normalriß c_n von c ist demnach die durch die Gleichung

$$x = \frac{2\, e_1}{h_1^{\,2}}\, r^2 \tag{2}$$

bestimmte *Parabel*; c ist die Durchdringungskurve von Γ mit dem parabolischen Zylinder, dessen Normalschnitt c_n ist. Durch jede in dieser Weise definierte räumliche Quartik läßt sich auch eine Kugel $\varkappa$ legen, die Γ in d' berührt; ihr Radius ist

$$R = \frac{h_1^{\,2} + (2\, e_1)^2}{4\, e_1} \tag{3}$$

Für $h_1 = 2\, e_1$ ergibt sich $R = 2\, e_1$, die Mitte von $\varkappa$ liegt in diesem Fall

[9] Vgl. *H. Horninger*: Über eine Evolventenschraubung; Istanbul Üniversiteis Fen Fakültesi Mecmuasi, Seri A, Cilt XVI, Sayi 4 (1951).

auf einer Erzeugenden von Γ; d. h. c ist ein *Viviani'sches Fenster*, k' ist eine *Kardioide*.

Stellt man diese Beziehungen den bekannten Hülleigenschaften einer *Pascal*'schen Kurve k' gegenüber, so ergibt sich folgendes Bild: Unter allen Kreisscharen, die k' zur Hüllkurve besitzen, gibt es *drei*, bei denen die Mittelpunkte der Scharkreise auf den beiden festen Polkreisen Γ', Γ_s' der k' erzeugenden Kreisrollungen $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{S}'$ liegen. 1. Jeder Kreis c_s', der durch den Doppelpunkt d' von k' läuft und einen Punkt M' von Γ_s' zur Mitte hat, berührt k' *einfach*; der Berührungspunkt ist der Gegenpunkt P_1' von d' bezüglich der mit M' inzidenten Tangente von Γ_s' (der von M' verschiedene Schnittpunkt von Γ_s' mit der Bahnnormalen $n' = [P_1'M']$ von k' ist Mitte eines der gleichen Schar angehörigen Kreises, der k' in einem von P_1' verschiedenen Punkt berührt)[10]. Deutet man c_s' als zyklographisches Bild eines auf Γ_s' liegenden Punktepaares C, $\overline{C}$, so ergibt sich k' als zyklographische Bildkurve der bizirkularen Quartik c_0, die der C-Kegel mit dem Scheitel d' aus Γ_s schneidet[11]. Falls k' eine Kardioide ist, wird c_0 zu einem *Viviani*'schen Fenster mit dem Doppelpunkt d'. — 2. Jeder Kreis p', der einen Momentanpol m' der Konchoidenbewegung $\mathfrak{K}'$ zur Mitte hat und durch den m' entsprechenden Punkt P_1' von k' läuft, berührt k' gleichfalls *einfach* (in P_1'), jeder solche Kreis berührt überdies in dem zu P_1' bezüglich der mit m' inzidenten Tangente i' von Γ' eine mit k' konzentrische Epitrochoide $\bar{k}'$. Die Kurven k', $\bar{k}'$ bilden miteinander das zyklographische Bild einer algebraischen Raumkurve höherer Ordnung k^r, die auf dem Zylinder Γ liegt[12]. — 3. Der Kreis q', der k' in P_1' berührt und seinen Mittelpunkt in dem von m' verschiedenen Schnittpunkt z' des Kreises $l' = \Gamma'$ mit n' hat, berührt k' *doppelt*, nämlich außer in P_1' noch in dem Punkte P_2', der P' bezüglich der durch z' laufenden Tangente von l' symmetrisch gegenüberliegt. Die rationale Quartik c, deren zyklographische Bildkurve k' ist, gehört wohl ebenso wie k^r dem Zylinder Γ an, ist aber eine *von k^r völlig verschiedene Kurve*: Während die beiden zyklographischen Teilhüllkurven von k^r aus zwei

---

[10] Vgl. z. B. *H. Wieleitner*, a. a. O.; Nr. 59.

[11] Vgl. *E. Müller-J. Krames*: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. II, Die Zyklographie (Deuticke 1929), S. 271 sowie die in Fußn. 12 zit. Abh. von *O. Danzer*.

[12] Vgl. *O. Danzer*: Über Kurven, die sich zyklographisch als Zykloiden abbilden, Mh. Math. Phys., Bd. 22 (1911), S. 170—176, wo für den Fall einer beliebigen Trochoide k' das die Kurve k^r bestimmende Gleichungssystem angegeben wird.

verschiedenen Kurven k', $\bar{k}'$ bestehen, sind die von c *die beiden durch den Doppelpunkt d' getrennten Teile von k'*. Falls k' als Kardioide vorausgesetzt wird, fällt c *mit dem unter* 1 *genannten Viviani'schen Fenster* zusammen. Wir können somit feststellen:

Satz 8: *Jede Konchoidenschraublinie k ist Basis eines Büschels gerader, offener Regelschraubflächen mit zueinander parallelen Achsen und gleichem Parameter. Die festen Polzylinder Γ, Γ_s der Konchoidenschraubung $\mathfrak{R}$ und der symmetrischen Zylinderschrotung $\mathfrak{S}$, deren Bahnkurve k ist, tragen je eine bizirkulare Quartik c, bzw. c_0, die den Grundriß k' von k zur zyklographischen Bildkurve haben. c liegt auf einer Kugel, die Γ im Doppelpunkt d' von k' berührt; die Bildzykel der Punkte von c berühren k' doppelt. c_0 gehört dem C-Kegel an, dessen Scheitel d' ist; die Bildzykel der Punkte von c_0 enthalten d' und berühren k' einfach. Wird k als Kardioidenschraublinie gewählt, so sind die Kurven c, c_0 in einem Viviani'schen Fenster vereinigt*

bzw.

Satz 9: *Jede Pascal'sche Kurve k' läßt sich in dreifacher Weise als Einhüllende einer Schar von Kreisen darstellen, deren Mittelpunkte auf den Polkreisen Γ', Γ_s' der k' erzeugenden Kreisrollungen $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{S}'$ liegen. Jeder Kreis, dessen Mitte Γ_s' angehört, läuft durch den Doppelpunkt d' von k' und berührt k' einfach; jeder Kreis, der seine Mitte in einem Momentanpol m' von $\mathfrak{R}'$ hat und den m' entsprechenden Punkt von k' enthält, berührt k' gleichfalls einfach. Jeder Kreis dagegen, der einen Punkt P_1' von k' enthält und dessen Mitte der von m' verschiedene, auf dem Polstrahl $[P_1'm']$ liegende Punkt von Γ' ist, berührt k' doppelt. Im Falle einer Kardioide k' ist die erstgenannte Kreisschar mit der letztgenannten identisch.*

Strukturbeziehungen zwischen endlicher Gruppe, Gruppenring und irreduziblen Darstellungen.

Von

Gilbert Helmberg, Innsbruck.

(Eingelangt am 9. Juni 1954.)

Ist von einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den Elementen $E, A, B \ldots$ ein vollständiges System nicht äquivalenter irreduzibler Darstellungen gegeben, so lassen sich aus gewissen einfach zu erkennenden Eigenschaften dieser Darstellungen bzw. der einzelnen Matrizen Aussagen über die Struktur der Gruppe ableiten. Beispielsweise ist die Anzahl der inäquivalenten Darstellungen 1. Grades der Index der Kommutatorgruppe und diese besteht aus jenen Elementen, die in jeder von diesen Darstellungen durch die Einheitswurzel 1 dargestellt werden. Das Zentrum besteht aus jenen Elementen, die in jeder irreduziblen Darstellung höheren als 1. Grades durch eine mit einer Einheitswurzel multiplizierte Einheitsmatrix dargestellt werden (für die Darstellungen 1. Grades ist dies trivialerweise der Fall). Übrigens genügt es hier, eine treue irreduzible Darstellung zu untersuchen, falls eine solche existiert.

In diesem Rahmen besteht weiters ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen der Gruppentheorie und der Theorie der diophantischen Approximationen. Es gilt nämlich, wie *Eckmann*[1] gezeigt hat, in endlichen Gruppen der

Satz I:

„*Die abelsche Gruppe* $\mathfrak{G}$ *wird dann und nur dann durch das Element* A *erzeugt, wenn für alle nichttrivialen Charaktere* $\mathfrak{D}$ *von* $\mathfrak{G}$ $D(A) = 1$ ist", oder, in einer etwas schärferen Formulierung, in der die Voraussetzung, daß $\mathfrak{G}$ von vornherein als abelsch bekannt ist, wegfällt,

---

[1] *Beno Eckmann*, „Über monothetische Gruppen", Comm. math. Helv. volumen **16** (1944).

Satz II:

„Die Gruppe $\mathfrak{G}$ wird dann und nur dann durch das Element A erzeugt, wenn A in jeder nichttrivialen irreduziblen Darstellung fixpunktfrei ist".

„A besitzt in der Darstellung $\mathfrak{D}$ einen Fixpunkt" soll hiebei besagen, daß die zugehörige Matrix den Eigenwert 1 besitzt; andernfalls heißt A in der Darstellung $\mathfrak{D}$ fixpunktfrei.

Beide Sätze sind deutliche Analogien zu dem in der Zahlentheorie bestehenden „Kroneckerschen Approximationssatz"

Satz III:

„Das reelle Ungleichungssystem

$$| \alpha_\nu x - \beta_\nu | < \varepsilon \qquad (mod\ 1) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist dann und nur dann für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und jedes beliebige System reeller Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots . \beta_n$ durch eine ganze Zahl x lösbar, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \alpha_\nu \not\equiv 0 \qquad (mod\ 1)$$

für jeden von $(0, \ldots, 0)$ verschiedenen Gitterpunkt $(h_1, \ldots, h_n)$ gilt".

Einer Anregung von Herrn Prof. *Hlawka* folgend hat der Verfasser in seiner Dissertation[2] eine direkte Ableitung des Satzes I aus Satz III gegeben und, von der Tatsache ausgehend, daß Satz III nur ein Spezialfall wesentlich allgemeinerer Sätze über diophantische Approximationen ist (s. S. 257), eine Weiterführung dieser Analogie versucht. Das Ergebnis enthält

Satz IV:

„Ein Element B der abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann eine Potenz des Elementes A, wenn B in jeder irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$, die dem Element A den Charakter $D(A) = 1$ zuordnet, ebenfalls den Charakter $D(B) = 1$ besitzt".

Als sein Gegenstück aus der Zahlentheorie sei angeführt

Satz V:

„Das reelle Ungleichungssystem

$$| \alpha_\nu x - \beta_\nu | < \varepsilon \qquad (mod\ 1) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist dann und nur dann für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ durch eine ganze Zahl x lösbar, wenn für jeden Gitterpunkt $(h_1, \ldots, h_n)$, für den

[2] *Gilbert Helmberg*, „Der Kroneckersche Approximationssatz in Gruppen von endlicher Ordnung" (Diss. Univ. Wien 1950).

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \alpha_\nu \equiv 0 \qquad (mod\ 1)$$

auch

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \beta_\nu \equiv 0 \qquad (mod\ 1)$$

gilt".

Die erwähnten Beziehungen legen es nahe, nach dem Ausmaß und dem inneren Zusammenhang dieser Beziehungen zwischen der Struktur einer endlichen Gruppe und der Eigenschaften der Matrizen ihrer irreduziblen Darstellungen zu fragen und in diesem Rahmen weitergehende Analogien zwischen Sätzen über diophantische Approximationen und solchen der Gruppentheorie zu vermuten.

Tatsächlich lassen sich die erwähnten Beziehungen noch wesentlich ergänzen und allgemeineren Beziehungen zwischen Untergruppen und irreduziblen Darstellungen unterordnen, die im folgenden aufgezeigt werden sollen und insbesondere die volle Übertragung des Kroneckerschen Approximationssatzes in seiner allgemeinsten Fassung auf endliche Gruppen enthalten. Wenn hiebei die entsprechenden Ableitungen auch dort, wo sie sich gelegentlich in bekannten Bahnen bewegen, explizit dargelegt werden, so möge dies der Absicht, eine möglichst vollständige Einsicht in das besprochene Beziehungsgefüge zu vermitteln, zugute gehalten werden.

Ausgangspunkt für unsere Überlegungen ist der Gruppenring Γ von $\mathfrak{G}$, wobei die Elemente des zugehörigen Koeffizientenkörpers $\mathfrak{K}$ mit $a, b, c \ldots$ bezeichnet werden sollen und $\mathfrak{K}$ den für die irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ benötigten Körper enthalten soll. Die Elemente von Γ seien $\alpha, \beta, \gamma \ldots$. Ein beliebiges Ringelement $\gamma = \sum_{S \in \mathfrak{G}} c_S S$ $(c_S \in \mathfrak{K})$ wird durch Rechtsmultiplikation mit dem Einheitselement E von $\mathfrak{G}$ reproduziert, da $\gamma E = \gamma$. Die Menge aller Gruppenelemente, die γ bei Rechtsmultiplikation reproduzieren, bildet eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, da mit $\gamma A = \gamma$, $\gamma B = \gamma$ auch $\gamma AB = \gamma$ gilt. Diese Untergruppe reproduziert nicht nur γ, sondern auch jedes Element des von γ erzeugten Linksideals in Γ. Auf diese Weise ist jedem linksseitigen Hauptideal von Γ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, nämlich die Menge aller ein erzeugendes Element des Ideals bei Rechtsmultiplikation reproduzierenden Gruppenelemente, eindeutig zugeordnet. Einem Unterideal entspricht dabei gegebenenfalls eine umfassendere Untergruppe, einem Oberideal gegebenenfalls eine kleinere Untergruppe.

Um zu erkennen, welche Gestalt ein Element γ von Γ besitzt, das durch eine gegebene Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ bei Rechtsmultiplikation reproduziert wird, ordnen wir die Elemente von $\mathfrak{G}$ nach linksseitigen Restklassen von $\mathfrak{H}$. Hiebei sei g die Ordnung von $\mathfrak{G}$, h diejenige von $\mathfrak{H}$ und i der Index von $\mathfrak{H}$ unter $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + S_2\,\mathfrak{H} + \ldots + S_i\,\mathfrak{H}$$

Bringen wir die Elemente $H \in \mathfrak{H}$ in eine gewisse Reihenfolge $H_1 = E$, $H_2, \ldots, H_h$, so können wir für γ schreiben

$$\gamma = \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{h} c_{kl}\, S_k\, H_l \qquad c_{kl} \in \mathfrak{K}$$

und erhalten für $\gamma\, H_m = \gamma$

$$\sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{h} c_{kl}\, S_k\, H_l\, H_m = \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{h} c_{kl}\, S_k\, H_l \qquad m = 1, 2, \ldots, h.$$

Setzen wir $H_l\, H_m = H_{\bar{l}}$, so bewirkt die Multiplikation mit H_m in $\mathfrak{H}$ eine Permutation $\begin{Bmatrix} H_l \\ H_{\bar{l}} \end{Bmatrix}$, die wir auch als Permutation der Indizes $\begin{Bmatrix} l \\ \bar{l} \end{Bmatrix}$ auffassen können. Aus

$$\sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{h} c_{kl}\, S_k\, H_{\bar{l}} = \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{h} c_{k\bar{l}}\, S_k\, H_{\bar{l}}$$

erhalten wir durch Koeffizientenvergleich $c_{kl} = c_{k\bar{l}}$. Da durch Multiplikation mit einem geeignet gewählten H_m jeder Index l in jeden beliebigen Index $\bar{l}$ übergeführt werden kann, ergibt sich

$$c_{k1} = c_{k2} = \ldots = c_{kh} = c_k \;(k = 1, 2, \ldots, i)$$

und

$$\gamma = \sum_{k=1}^{i} c_k\, S_k \sum_{l=1}^{h} H_l$$

$$= \sum_{k=1}^{i} c_k\, S_k \sum_{H \in \mathfrak{H}} H$$

Jedes Element von dieser Form wird auch tatsächlich durch Rechtsmultiplikation mit jedem Element von $\mathfrak{H}$ reproduziert und gehört dem durch $\chi = \sum_{H \in \mathfrak{H}} H$ oder die Elementsumme $S_k\,\chi$ über eine Linksrestklasse von $\mathfrak{H}$ erzeugten Linksideal an. Die diesem Ideal im obigen Sinne zugeordnete Untergruppe ist selbst wieder $\mathfrak{H}$. Wir erhalten damit eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen der Untergruppe $\mathfrak{H}$ und dem Linksideal $\mathfrak{h} = '(\chi)$. $\mathfrak{h}$ ist die Gesamtheit aller Ringelemente, die

durch Rechtsmultiplikation mit den Elementen von $\mathfrak{H}$ reproduziert werden und $\mathfrak{H}$ die Gesamtheit aller Gruppenelemente, die $\mathfrak{h}$ elementweise bei Rechtsmultiplikation reproduzieren.

Satz 1:

„*Ist $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{h} = '(\chi)$ das durch $\chi = \sum_{H \in \mathfrak{H}} H$ erzeugte, der Untergruppe $\mathfrak{H}$ zugeordnete Linksideal des Gruppenringes Γ, so ist $A \in \mathfrak{H}$ dann und nur dann, wenn $\chi A = \chi$. Ist $\bar{\mathfrak{h}}$ das der Untergruppe $\bar{\mathfrak{H}}$ zugeordnete Linksideal, so ist $\bar{\mathfrak{H}} \subseteq \mathfrak{H}$ dann und nur dann, wenn $\bar{\mathfrak{h}} \supseteq \mathfrak{h}$*".

Ist $\sigma = \sum_{S \in \mathfrak{G}} S$ und $X \in \mathfrak{G}$ ein beliebiges Gruppenelement, so gilt stets $\sigma X = X\sigma = \sigma$. Das von σ erzeugte Linksideal $\mathfrak{s} = (\sigma)$ ist ein beiderseitiges Ideal. Ist wieder $\gamma = \sum_{X \in \mathfrak{G}} c_X X$ ein beliebiges Ringelement von Γ, so gilt

$$\gamma\sigma = \sum_{X \in \mathfrak{G}} c_X X\sigma = \sum_{X \in \mathfrak{G}} c_X \sigma = c\sigma$$

$$\gamma\sigma = \sigma\gamma = c\sigma$$

Daraus folgt insbesonders, daß $\mathfrak{s}$ über dem Grundkörper $\mathfrak{R}$ den Rang 1 hat, also ein minimales Ideal ist. Es ist in allen einer Untergruppe von $\mathfrak{G}$ zugeordneten Linksidealen von Γ enthalten (da $\sigma\chi = h\sigma$) und wird elementweise bei Rechts- oder Linksmultiplikation mit einem beliebigen Gruppenelement reproduziert.

Γ ist eine Algebra vom Rang g über $\mathfrak{R}$. Fragen wir nach dem Rang des von γ erzeugten Linksideals über $\mathfrak{R}$, so haben wir zu untersuchen, wieviel linear unabhängige Elemente dieses Ideal enthält. Es genügt dazu, die Zahl r der linear unabhängigen unter den g-Elementen $S\gamma$ ($S \in \mathfrak{G}$) festzustellen, da jedes beliebige Element von $'(\gamma)$ $\delta\gamma = (\sum_{S \in \mathfrak{G}} d_S S)\gamma = \sum_{S \in \mathfrak{G}} d_S (S\gamma)$ von diesen linear abhängt. r ist der Rang der Koeffizientenmatrix C der rechten Seiten in den g-Identitäten

$$S\gamma = \sum_{X \in \mathfrak{G}} c_X SX.$$

Bringen wir die Elemente von $\mathfrak{G}$ in eine gewisse Reihenfolge, so steht der Koeffizient c_X in der zu S gehörigen Zeile in der Spalte SX. C ist also die Summe der mit c_X multiplizierten Matrizen, die sich aus der regulären Darstellung von $\mathfrak{G}$ für die Elemente S ergeben, oder, anders gesprochen, die reguläre Darstellungsmatrix des Elementes γ. Bei vollständiger Reduktion der regulären Darstellung bleibt der Rang von C

erhalten und ergibt sich als Summe der Ränge der irreduziblen Bestandteile:

Satz 2:

„*Ist* $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_j$ *ein vollständiges System nicht äquivalenter irreduzibler Darstellungen der Gruppe* $\mathfrak{G}$, *und bedeutet* n_ν *den Grad von* $\mathfrak{D}_\nu$ *und* r_ν *den Rang der Matrix von* $\gamma = \sum_{X \varepsilon \mathfrak{G}} c_X X$ *in der irreduziblen Darstellung* $\mathfrak{D}_\nu$, *so ist der Rang* r *des von* γ *im Gruppenring* Γ *erzeugten Linksideals* $'(\gamma)$ *über* $\mathfrak{R}$

$$r = \sum_{\nu=1}^{j} n_\nu r_\nu".$$

Wir betrachten von diesem Gesichtspunkt aus eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ und das ihr zugeordnete Linksideal $\mathfrak{h} = '(\chi)$. Sind $S_1 = E$, $S_2, \ldots, S_i$ Repräsentanten eines vollständigen Systems linksseitiger Restklassen von $\mathfrak{H}$, so sind die Elemente $S_k \chi$ $(k = 1, 2, \ldots, i)$ linear unabhängig, da sie paarweise elementfremd sind und jedes weitere Element von $\mathfrak{h}$ ist Linearkompositum der $S_k \chi$. Der Rang von $\mathfrak{h}$ über $\mathfrak{R}$ ist also gleich dem Index von $\mathfrak{H}$ unter $\mathfrak{G}$. Andrerseits ist der Rang r_ν der Summenmatrix $D_\nu(\chi) = \sum_{H \varepsilon \mathfrak{H}} D_\nu(H)$ gleich der Anzahl $f_\nu(\mathfrak{H})$ der in $\mathfrak{D}_\nu$ enthaltenen trivialen Darstellungen von $\mathfrak{H}$. Aus Satz 2 folgt:

Satz 3:

„*Ist* $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_j$ *ein vollständiges System nicht äquivalenter irreduzibler Darstellungen von* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{H}$ *eine Untergruppe vom Index* i *unter* $\mathfrak{G}$, *ferner* $f_\nu(\mathfrak{H})$ *die Anzahl der in* $\mathfrak{D}_\nu$ *enthaltenen trivialen Darstellungen von* $\mathfrak{H}$ *und* n_ν *der Grad von* $\mathfrak{D}_\nu$, *so gilt*

$$i = \sum_{\nu=1}^{j} n_\nu f_\nu(\mathfrak{H})".$$

$f_\nu(\mathfrak{H})$ kann auch aufgefaßt werden als Anzahl der linear unabhängigen Linearformen in den Substitutionsvariablen, die bei sämtlichen der Untergruppe $\mathfrak{H}$ entnommenen Substitutionen der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ invariant bleiben. Um die kommenden Ergebnisse übersichtlicher formulieren zu können, führen wir für eine solche Linearform die Bezeichnung „Fixpunkt" ein:

Definition 1:

„*Die Untergruppe* $\mathfrak{H}$ *besitzt in einer Darstellung* $\mathfrak{D}$ *der endlichen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *den durch* $f(\mathfrak{H})$ *linear unabhängige Linearformen in den Substitutions-*

variablen bestimmten „Fixraum $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$", wenn jede dieser Linearformen bei Ausführung der einem beliebigen Element $H \in \mathfrak{H}$ zugeordneten Substitution von $\mathfrak{D}$ ungeändert bleibt. Jede einzelne gegenüber allen Substitutionen von $\mathfrak{H}$ invariante Linearform heiße ein „Fixpunkt von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{D}$" und $f(\mathfrak{H})$ der „Fixrang von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{D}$". Dieser gibt gleichzeitig die Anzahl der in $\mathfrak{D}$ enthaltenen trivialen Darstellungen von $\mathfrak{H}$ an".

Unter einem „Fixpunkt von A in $\mathfrak{D}$" wollen wir dabei einen Fixpunkt der durch A erzeugten zyklischen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ verstehen und analog die Begriffe „Fixraum" und „Fixrang" auf einzelne Elemente von $\mathfrak{G}$ übertragen. $f(A)$ gibt dabei an, wie oft die Substitutionsmatrix $D(A)$ den Eigenwert 1 besitzt. Schließlich soll $\mathfrak{F}(A_1, \ldots, A_s)$ den allen Elementen $A_1, \ldots, A_s$ (d. h. allen durch diese Elemente erzeugten zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{G}$) gemeinsamen Fixraum in $\mathfrak{D}$ und $f(A_1, \ldots, A_s)$ dessen Dimension bedeuten.

Die Darstellung $\mathfrak{D} = \sum_{\nu=1}^{j} \mathfrak{D}_\nu$ der Gruppe $\mathfrak{G}$, welche jede irreduzible Darstellung genau einmal enthält (wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß sie in vollständig reduzierter Form erscheint), liefert bereits eine treue Darstellung des Gruppenringes Γ. Aus $\sum_{S \in \mathfrak{G}} c_S D(S) = O$ (O = Nullmatrix) folgt nämlich für die Stellenkoeffizienten $s_{kl}^{(\nu)}$ der Darstellungsmatrizen das homogene System der g Gleichungen

$$\sum_{S \in \mathfrak{G}} c_S s_{kl}^{(\nu)} = 0 \qquad k, l = \text{Stelle aus } \mathfrak{D}_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, j).$$

Faßt man die c_S als Unbekannte auf, so wird die Matrix dieses Gleichungssystems durch die g Stellenzeilen eines vollständigen Systems inäquivalenter irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{G}$ gebildet und besitzt daher eine von 0 verschiedene Determinante. Dieses System hat daher nur die triviale Lösung $c_S = 0$ und das Ideal der in $\mathfrak{D}$ auf O abgebildeten Elemente ist das Nullideal. Wir wollen unter $\mathfrak{D}$, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt, künftig diese spezielle Darstellung verstehen und sie kurz als „Hauptdarstellung" von $\mathfrak{G}$ bzw. Γ bezeichnen.

Wir transformieren nun in $\mathfrak{D}$ die irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_\nu$ so, daß die durch $\mathfrak{D}_\nu$ vermittelte Darstellung einer gegebenen Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ vollständig in irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{H}$ zerfällt. Enthält $\mathfrak{D}_\nu$ die triviale Darstellung von $\mathfrak{H}$, so steht an gewissen Stellen der Hauptdiagonale in der Matrix $D(H)$ eines beliebigen Elementes $H \in \mathfrak{H}$ immer der Koeffizient 1, während alle übrigen Koeffizienten der

gleichen Zeile verschwinden. In der dem Element $\chi = \sum_{H \in \mathfrak{H}} H$ zugeordneten Matrix $D(\chi)$ steht dann an jeder entsprechenden Stelle der Hauptdiagonale der Koeffizient h, sämtliche übrigen Koeffizienten dieser Matrix verschwinden. Zerfällt in jeder irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ die einem Element $A \in \mathfrak{G}$ zugeordnete Matrix so, daß an jeder Stelle der Hauptdiagonale, an der $\mathfrak{D}_\nu$ die triviale Darstellung von $\mathfrak{H}$ enthält, als einziger von 0 verschiedener Koeffizient der gleichen Zeile 1 steht, so gilt tatsächlich $D(\chi) D(A) = D(\chi)$ und A gehört nach Satz 1 zu $\mathfrak{H}$. Es ergibt sich

Satz 4:

„Ein Element A der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ gehört dann und nur dann der Untergruppe $\mathfrak{H}$ an, wenn der Fixraum von A in jeder irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ den Fixraum von $\mathfrak{H}$ enthält. Eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{H}}$ ist dann und nur dann in einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ enthalten, wenn der Fixraum von $\overline{\mathfrak{H}}$ in jeder irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ den Fixraum von $\mathfrak{H}$ enthält".

In Formeln geschrieben lautet Satz 4:

$A \in \mathfrak{H}$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{F}_\nu(A) \supseteq \mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{H}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, j)$

$\overline{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{F}_\nu(\overline{\mathfrak{H}}) \supseteq \mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{H}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, j)$

Wir sehen, daß jede Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ durch ihren Fixraum in einem vollständigen System nicht äquivalenter irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt ist. Greifen wir aus $\mathfrak{G}$ eine Anzahl beliebiger Elemente $A_1, \ldots, A_s$, so erzeugen diese eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, nämlich die Gesamtheit aller Elemente von $\mathfrak{G}$, die sich als Produkt endlich vieler der Elemente $A_1, \ldots, A_s$ in beliebiger Reihenfolge und Wiederholung schreiben lassen. Es kann sein, daß $f_\nu(A_1, \ldots, A_\nu) > 0$, d. h. daß die $A_1, \ldots, A_s$ in einer irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ gemeinsame Fixpunkte besitzen. Dann gehört $\mathfrak{F}_\nu(A_1, \ldots, A_s)$ auch dem Fixraum jedes Elementes von $\mathfrak{H}$ an, d. h. $\mathfrak{F}_\nu(A_1, \ldots, A_s) \subseteq \mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{H})$. Da aber die $A_1, \ldots, A_s$ ausgewählte Elemente aus $\mathfrak{H}$ sind, gilt jedenfalls $\mathfrak{F}_\nu(A_1, \ldots, A_s) \supseteq \mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{H})$ und somit $\mathfrak{F}_\nu(A_1, \ldots, A_s) = \mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{H})$ und jedes Element B mit $\mathfrak{F}_\nu(B) \supseteq \mathfrak{F}_\nu(A_1, \ldots, A_s)$ ist in $\mathfrak{H}$ enthalten und darstellbar als Produkt der Elemente $A_1, \ldots, A_s$.

Satz 5:

„Ein Element B der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann darstellbar als Produkt endlich vieler der Elemente $A_1, \ldots, A_s$ in beliebiger

Reihenfolge und Wiederholung, wenn $\mathfrak{F}_\nu(B) \supseteq \mathfrak{F}_\nu(A_1, \ldots, A_s)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, j$".

Ein praktisch anwendbares Verfahren, das Bestehen oder Nichtbestehen der Beziehung $\mathfrak{F}_\nu(B) \supseteq \mathfrak{F}_\nu(A_1, \ldots, A_s)$ festzustellen, liefern uns folgende Überlegungen: allgemein gilt $f(A_1, \ldots, A_s) \geqq f(A_1, \ldots, A_s, B)$. Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $\mathfrak{F}_\nu(B) \supseteq \mathfrak{F}_\nu(A_1, \ldots, A_s)$. Wir transformieren wie oben $\mathfrak{D}$ so, daß in $\mathfrak{D}_\nu$ die Darstellung der durch $A_1, \ldots, A_s$ erzeugten Untergruppe $\mathfrak{H}$ in vollständig reduzierter Form erscheint. Die Matrix $F_\nu(S) = D_\nu(S) - \mathfrak{E}_\nu$ ($\mathfrak{E}_\nu$ = Einheitsmatrix in $\mathfrak{D}_\nu$) enthält dann genau $f_\nu(S)$ Nullzeilen und -Spalten, die gerade jene Substitutionsvariablen angeben, die in der transformierten Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ den Fixraum von S bestimmen. Durch Aneinanderreihung der s Matrizen $F_\nu(A_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ bilden wir die Matrix $F_\nu(A_1, \ldots, A_s)$ mit n_ν Zeilen und $n_\nu s$ Spalten. Ihr Rang ist gleich $n_\nu - f_\nu(A_1, \ldots, A_s)$. Ist eine beliebige nicht singuläre Matrix M vom Grade n_ν gegeben und multiplizieren wir $F_\nu(A_1, \ldots, A_s)$ links mit M, rechts mit der ebenfalls nicht singulären quadratischen Matrix vom Grad $n_\nu s$, die durch s-fache Aneinanderreihung der Matrix M entlang der Hauptdiagonale entsteht, und an deren übrigen Stellen der Koeffizient 0 steht, so läßt diese Operation als beiderseitige Multiplikation mit einer nichtsingulären Matrix den Rang von $F_\nu(A_1. \ldots, A_s)$ ungeändert. Jede der in $F_\nu(A_1, \ldots, A_s)$ enthaltenen quadratischen Matrizen $F_\nu(A_k)$ wird aber dabei mittels M transformiert. Der Rang der Matrix $F_\nu(A_1, \ldots, A_s)$ ist also unabhängig davon, welche unter allen äquivalenten irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_\nu$ unseren Untersuchungen zu Grunde liegt, und ebenso gilt das für $F_\nu(A_1, \ldots, A_s, B)$. Aus der Gleichheit beider Ränge folgt $f_\nu(A_1, \ldots, A_s) = f_\nu(A_1, \ldots, A_s, B)$ und umgekehrt.

Definition 2:

„Ist $\mathfrak{D}$ eine Darstellung der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Grade n und $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix von $\mathfrak{D}$, so soll $F(A_1, \ldots, A_s)$ die rechteckige Matrix von n Zeilen und ns Spalten bedeuten, die durch Aneinanderreihung der s quadratischen Matrizen $F(A_k) = D(A_k) - \mathfrak{E}$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ entsteht, und „Fixrangmatrix von $A_1, \ldots, A_s$ in $\mathfrak{D}$" heißen".

Satz 6:

„Ein Element B der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann darstellbar als Produkt endlich vieler der Elemente $A_1, \ldots, A_s$ in beliebiger Reihenfolge und Wiederholung, wenn die Fixrangmatrizen $F_\nu(A_1, \ldots, A_s)$

und $F_\nu(A_1, \ldots, A_s, B)$ in jeder irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ gleichen Rang besitzen".

Als Index der von $A_1, \ldots, A_s$ erzeugten Untergruppe $\mathfrak{H}$ unter $\mathfrak{G}$ erhält man nach Satz 3:

$$i = \sum_{\nu=1}^{j} n_\nu f_\nu(A_1, \ldots, A_s).$$

Jedenfalls ist $f_1(A_1, \ldots, A_s) = 1$. Für $i = 1$ muß also $f_\nu(A_1, \ldots, A_s) = 0$ $(\nu = 2, 3, \ldots, j)$ gelten.

Satz 7:

„Die Elemente $A_1, \ldots, A_s$ erzeugen dann und nur dann die endliche Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn sie in keiner nicht trivialen irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ einen gemeinsamen Fixpunkt besitzen, d. h. wenn der Rang der Matrix $F_\nu(A_1, \ldots, A_s)$ für $\nu = 2, 3, \ldots, j$ gleich n_ν ist".

Diese Bedingung ist jedenfalls erfüllt, wenn in jeder nicht trivialen irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ mindestens ein Element unter den A_k fixpunktfrei ist. Es läßt sich dann aber die weitergehende Aussage machen:

Satz 8:

„Ist in jeder nicht trivialen irreduziblen Darstellung der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ mindestens eines der Elemente $A_1, \ldots, A_s$ fixpunktfrei und o_n die Ordnung von A_n $(n = 1, 2, \ldots, s)$, so ist $\prod_{n=1}^{s} o_n = kg$ (k ganz) und jedes Gruppenelement S wird in der Form $S = A_1^{a_1} A_2^{a_2} \ldots A_s^{a_s}$ $(0 \leqq a_n < o_n)$ genau k-mal erzeugt".

Beweis:

Wir bilden im Gruppenring Γ die Elemente $\alpha_n = \sum_{l=1}^{o_n} A_n^l$ $(n = 1, 2, \ldots, s)$. Dann ist

$$\varrho = \sum_{0 \leqq a_n < o_n} A_1^{a_1} A_2^{a_2} \ldots A_s^{a_s} = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s.$$

In der trivialen Darstellung von $\mathfrak{G}$ ist $D_1(\alpha_n) = o_n$ $(n = 1, 2, \ldots, s)$. In jeder anderen irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ $(\nu = 2, 3, \ldots, j)$ gilt für mindestens ein Element α_n, nämlich jenes, das in $\mathfrak{D}_\nu$ fixpunktfrei ist, $D_\nu(\alpha_n) = O_\nu$, somit

$$D_1(\varrho) = \prod_{n=1}^{s} o_n$$

$$D_\nu(\varrho) = O_\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, j)$$

In der Hauptdarstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$ ist also der einzige von 0 verschiedene Koeffizient der Matrix $D(\varrho)$ das an der 1. Stelle der 1. Zeile stehende Produkt $\prod_{n=1}^{s} o_n$. Setzen wir

$$\frac{\prod_{n=1}^{s} o_n}{g} = k,$$

so ist $D(\varrho) = k\, D(\sigma)$ oder

$$\varrho = \sum_{0 \leqq a_n < o_n} A_1^{a_1} A_2^{a_2} \dots A_s^{a_s} = k \sum_{S \in G} S.$$

Daher ist k eine ganze Zahl und ϱ enthält jedes Gruppenelement S genau k-mal.

Aus Satz 8 geht noch hervor, daß die Elemente $A_1, \dots, A_s$ zur Erzeugung der Gruppe in der beschriebenen Art genau so gut auch in einer anderen Reihenfolge angeschrieben werden können. Seine Umkehrung besagt, daß, wenn das Produkt der Ordnungen der Elemente $A_1, \dots, A_s$ kein Vielfaches der Gruppenordnung ist, mindestens eine nicht triviale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$ existiert, in der jedes dieser Elemente mindestens einen Fixpunkt besitzt.

Die in Satz 8 gemachte Voraussetzung ist aber weder notwendig dafür, daß die Potenzprodukte der in einer bestimmten Reihenfolge angeschriebenen Elemente $A_1, \dots, A_s$ jedes Gruppenelement liefern, noch dafür, daß dabei jedes Element gleich oft erzeugt wird oder bloß dafür, daß das Ordnungsprodukt dieser Elemente ein Vielfaches von g ist. Beispielsweise erhält man sämtliche Permutationen der symmetrischen Gruppe von 3 Variablen in der Form $(12)^a\,(13)^b\,(12)^c$, obwohl beide Transpositionen in der irreduziblen Darstellung 2. Grades der $\mathfrak{S}_3$ je einen Fixpunkt besitzen. Andrerseits ist auch die Tatsache, daß diese Transpositionen in keiner nicht trivialen irreduziblen Darstellung einen gemeinsamen Fixpunkt besitzen und ihr Ordnungsprodukt größer als 6 ist, nicht hinreichend dafür, daß $(12)^a\,(12)^b\,(13)^c$ alle Gruppenelemente der $\mathfrak{S}_3$ liefert. Zwei Permutationen der Ordnung 2 der alternierenden Gruppe von 4 Variablen erzeugen einen abelschen Normalteiler vom Typus (2,2). Seine Faktorgruppe ist zyklisch von der Ordnung 3; daher läßt sich jedes Gruppenelement der $\mathfrak{A}_4$ eindeutig in der Form $[(12)\,(34)]^a\,[(13)\,(24)]^b\,\,(123)^c$ $(0 \leqq a, b < 2,\ 0 \leqq c < 3)$ schreiben. Trotzdem besitzt jedes dieser Elemente in der irreduziblen Darstellung 3. Grades der $\mathfrak{A}_4$ einen Fixpunkt.

Sämtliche irreduziblen Darstellungen einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ sind in einem vollständigen System nicht äquivalenter irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{G}$ enthalten. Ordnen wir nämlich die Elemente von $\mathfrak{G}$ nach Linksrestklassen von $\mathfrak{H}$ und soll wieder i den Index von $\mathfrak{H}$ unter $\mathfrak{G}$ bedeuten, so zerfällt die reguläre Darstellung von $\mathfrak{G}$ im Elementbereich von $\mathfrak{H}$ in i reguläre Darstellungen von $\mathfrak{H}$. Da jede von diesen sämtliche irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{H}$ enthält, muß jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{H}$ in mindestens einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{G}$ enthalten sein. Wird $\mathfrak{H}$ erzeugt durch die Elemente $A_1, \ldots, A_s$, und wenden wir Satz 8 auf $\mathfrak{H}$ an, so ergibt sich

Satz 9:

„Ist in jeder irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ der den Elementen $A_1, \ldots, A_s$ gemeinsame Fixraum genau der Fixraum mindestens einer dieser Elemente, d. h. gilt in jeder irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ für mindestens eines der Elemente $A_1, \ldots, A_s$ $f_\nu(A_1, \ldots, A_s) = f_\nu(A_n)$, so wird jedes Element der durch $A_1, \ldots, A_s$ erzeugten Untergruppe $\mathfrak{H}$ bereits in der Form $A_1^{a_1} A_2^{a_2} \ldots A_s^{a_s}$ $(0 \leqq a_n < o_n)$ gleich oft geliefert".

Das Bestehen der Beziehung $f_\nu(A_1, \ldots, A_s) = f_\nu(A_n)$ wird wieder dadurch angezeigt, daß die Ränge der beiden Fixrangmatrizen $F_\nu(A_1, \ldots, A_s)$ und $F_\nu(A_n)$ übereinstimmen. Auch für die Erzeugung der Untergruppe $\mathfrak{H}$ in der beschriebenen Weise ist wieder die Reihenfolge, in der die Elemente $A_1, \ldots, A_s$ angeschrieben sind, von vornherein gleichgültig.

Bei der Ableitung des Satzes 9 haben wir gesehen, daß die reguläre Darstellung von $\mathfrak{G}$ die reguläre Darstellung der Untergruppe $\mathfrak{H}$ genau i-mal enthält. Da jede von diesen wieder die triviale Darstellung von $\mathfrak{H}$ genau einmal enthält, andrerseits die reguläre Darstellung von $\mathfrak{G}$ die irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ n_ν-mal enthält und $f_\nu(\mathfrak{H})$ die Anzahl der in $\mathfrak{D}_\nu$ enthaltenen trivialen Darstellungen von $\mathfrak{H}$ bedeutet, ergibt sich auch auf diesem Wege die bereits in Satz 3 aufgestellte Formel.

Eine Sonderstellung nehmen im Bereich der bisher abgeleiteten Sätze die abelschen Gruppen ein. Ihre irreduziblen Darstellungen haben sämtlich den Grad 1 und die Elemente $A_1, \ldots, A_s$ besitzen dann und nur dann in $\mathfrak{D}_\nu$ keinen gemeinsamen Fixpunkt, wenn mindestens eines davon in $\mathfrak{D}_\nu$ fixpunktfrei ist. Damit fallen einerseits die in Satz 4 bzw. 5 und 9 enthaltenen Kriterien, andrerseits diejenigen der Sätze 7 und 8 zusammen und liefern in Verbindung mit Satz 3:

Satz 10:

Ein Element B der endlichen abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann Potenzprodukt der Elemente $A_1, \ldots, A_s$, wenn jede irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$, die den A_n $(n = 1, 2, \ldots, s)$ gleichzeitig den Charakter 1 zuordnet, auch dem Element B diesen Charakter erteilt. Der Index der von $A_1, \ldots, A_s$ erzeugten Untergruppe $\mathfrak{H}$ unter $\mathfrak{G}$ ist gleich der Anzahl dieser irreduziblen Darstellungen und jedes Element von $\mathfrak{H}$ wird in der Form $H = A_1^{a_1} A_2^{a_2} \ldots A_s^{a_s}$ $(0 \leqq a_n < o_n)$ gleich oft erzeugt".

Satz 11:

„*Die Elemente $A_1, \ldots, A_s$ erzeugen dann und nur dann die endliche abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn in jeder nicht trivialen irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{G}$ mindestens eines dieser Elemente fixpunktfrei ist. Jedes Gruppenelement wird in der Form $S = A_1^{a_1} A_2^{a_2} \ldots A_s^{a_s}$ $(0 \leqq a_n < o_n)$ gleich oft geliefert*".

Eine Basis der abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist somit die kleinste Menge von Gruppenelementen, die der obigen Bedingung genügen.

In einer nicht abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ kann der Normalisator einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ charakterisiert werden als Gesamtheit aller Gruppenelemente N, die im Gruppenring Γ mit $\chi \sum_{H \varepsilon \mathfrak{H}} H$ vertauschbar sind, d. h. für die $\chi N' = N \chi$ gilt. Eine Beziehung zu den irreduziblen Darstellungen stellt folgender Satz her:

Satz 12:

„*Ein Element N der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ gehört dann und nur dann zum Normalisator einer Untergruppe $\mathfrak{H}$, wenn N in jeder irreduziblen Darstellung höheren als 1. Grades von $\mathfrak{G}$ den Fixraum $\mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{H})$ in sich überführt*".

Beweis:

Wir transformieren in der Hauptdarstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{G}$ jede irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ so, daß die Untergruppe $\mathfrak{H}$ vollständig reduziert und somit $D(\chi)$ in Diagonalform erscheint. An gewissen Stellen der Hauptdiagonale in $D(\chi)$ steht dann die Ordnung h von $\mathfrak{H}$ als Koeffizient, an den übrigen Stellen aber durchgehend der Koeffizient 0. Durch eine weitere Transformation (Vertauschung von Zeilen bzw. Spalten) erreichen wir, daß die von 0 verschiedenen Koeffizienten in $D_\nu(\chi)$ jeweils an die ersten $f_\nu(\mathfrak{H})$ Stellen der Hauptdiagonale rücken. Bei der Pro-

duktbildung χN bzw. $N\chi$ werden jeweils nur die den einzelnen irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_\nu$ zugehörigen Matrizen miteinander multipliziert. Die ersten $f_\nu(\mathfrak{H})$ Zeilen von $D_\nu(\chi) \cdot D_\nu(N)$ sind dann die ersten $f_\nu(\mathfrak{H})$ mit h multiplizierten Zeilen von $D_\nu(N)$, die weiteren Zeilen enthalten nur den Koeffizienten 0. Ebenso sind die ersten $f_\nu(\mathfrak{H})$ Spalten in $D_\nu(N) \cdot D_\nu(\chi)$ gleich den ersten $f_\nu(\mathfrak{H})$ mit h multiplizierten Spalten von $D_\nu(N)$, die weiteren aber Nullspalten. Aus $\chi N = N\chi$ folgt, daß $D_\nu(N)$ ganz reduziert erscheint und in eine an erster Stelle stehende Matrix vom Grade $f_\nu(\mathfrak{H})$ und eine weitere vom Grad $n_\nu - f_\nu(\mathfrak{H})$ zerfällt, also den Fixraum von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{D}_\nu$ in sich überführt.

Läßt umgekehrt N in jeder irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ den Fixraum von $\mathfrak{H}$ fest (was für Darstellungen ersten Grades trivialerweise erfüllt ist), so gilt das auch für N^{-1} (da alle Elemente mit dieser Eigenschaft eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ bilden) und beide erscheinen, sobald $\mathfrak{D}_\nu$ die triviale Darstellung von $\mathfrak{H}$ enthält, halb reduziert, da die den Fixraum von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{D}_\nu$ bestimmenden Variablen nur unter sich substituiert werden. Wir bilden die adjungierte Darstellung $\overline{\mathfrak{D}}_\nu$ zu $\mathfrak{D}_\nu$. In ihr wird N durch die transponierte Matrix $D_\nu^{(t)}(N^{-1})$ von $D_\nu(N^{-1})$ dargestellt, aber es ist $\overline{D}_\nu(\chi) = D_\nu(\chi)$, daher auch $\overline{\mathfrak{F}}_\nu(\mathfrak{H}) = \mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{H})$. N führt nach Voraussetzung in $\overline{\mathfrak{D}}_\nu$ wieder $\overline{\mathfrak{F}}_\nu(\mathfrak{H})$ in sich über. $\overline{D}_\nu(N) = D_\nu^{(t)}(N^{-1})$ erscheint also wieder derart halb reduziert, daß die $\mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{H})$ bestimmenden Variablen nur unter sich substituiert werden. Da auch $D_\nu(N^{-1})$ in dieser Weise halb reduziert war, erkennen wir, daß $D_\nu(N^{-1})$ und damit auch $D_\nu(N)$ ganz reduziert ist und in eine an erster Stelle stehende Matrix vom Grad $f_\nu(\mathfrak{H})$ und in eine weitere vom Grad $n_\nu - f_\nu(\mathfrak{H})$ zerfällt. Man sieht sofort, daß dann $D_\nu(\chi) \cdot D_\nu(N) = D_\nu(N) \cdot D_\nu(\chi)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, j)$ und somit auch $\chi N = N\chi$ gilt.

Damit $\mathfrak{H}$ Normalteiler der ganzen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist, muß die in Satz 12 ausgesprochene Bedingung für jedes Gruppenelement S zutreffen. Nach dem eben geführten Beweis läßt sich dann $\mathfrak{D}_\nu$ so reduzieren, daß $\mathfrak{D}_\nu$ in zwei Darstellungen der ganzen Gruppe vom Grade $f_\nu(\mathfrak{H})$ bzw. $n_\nu - f_\nu(\mathfrak{H})$ zerfällt. Da $\mathfrak{D}_\nu$ irreduzibel ist, muß entweder $f_\nu(\mathfrak{H}) = 0$ oder $f_\nu(\mathfrak{H}) = n_\nu$ gelten. Im ersten Falle enthält $\mathfrak{D}_\nu$ die triviale Darstellung von $\mathfrak{H}$ nicht, im zweiten wird jedes Element von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{D}_\nu$ auf die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}_\nu$ abgebildet. Ist in jeder irreduziblen Darstellung höheren als ersten Grades von $\mathfrak{G}$ einer der beiden Fälle zutreffend, so erfüllen auch tatsächlich sämtliche Gruppenelemente von $\mathfrak{G}$ die Bedingung des Satzes 12. Damit erhalten wir

Satz 13:

„Eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann Normalteiler von $\mathfrak{G}$, wenn in jeder irreduziblen Darstellung höheren als 1. Grades $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$, in der $\mathfrak{H}$ nicht durch $\mathfrak{E}_\nu$ dargestellt wird, $f_\nu(\mathfrak{H}) = 0$ gilt".

Das ist insbesonders erfüllt, wenn von den die Untergruppe $\mathfrak{H}$ erzeugenden Elementen $A_1, \ldots, A_s$ in jeder irreduziblen Darstellung höheren als 1. Grades mindestens eines fixpunktfrei ist:

Satz 14:

„Ist von den Elementen $A_1, \ldots, A_s$ in jeder irreduziblen Darstellung höheren als 1. Grades von $\mathfrak{G}$ mindestens eines fixpunktfrei, so erzeugen $A_1, \ldots, A_s$ einen Normalteiler von $\mathfrak{G}$".

Da hiebei die Voraussetzungen von Satz 9 zutreffen, wird der Normalteiler bereits in der dort beschriebenen Weise erzeugt. Auf eine zyklische Untergruppe angewandt besagt Satz 13, daß ein Element A dann und nur dann einen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ erzeugt, wenn es in jeder irreduziblen Darstellung höheren als 1. Grades von $\mathfrak{G}$, in der es nicht durch die Einheitsmatrix dargestellt ist, fixpunktfrei ist. Ist ein Element A in jeder irreduziblen Darstellung höheren als 1. Grades fixpunktfrei, so ist automatisch jede A enthaltende Untergruppe Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Ein besonderes Beispiel hiefür liefert die Quaternionengruppe. Sie besitzt als einzige irreduzible Darstellung höheren als 1. Grades eine solche vom Grad 2, die in der jedes Element mit Ausnahme des Einheitselementes fixpunktfrei ist; tatsächlich ist jede Untergruppe der Quaternionengruppe Normalteiler. Dagegen besitzt die alternierende Gruppe von 4 Variablen als Drehungsgruppe eines Tetraeders eine irreduzible Darstellnng 3. Grades, in der jedes Element mit Ausnahme des Einheitselementes genau einen Fixpunkt besitzt. Dementsprechend enthält die $\mathfrak{A}_4$ keinen zyklischen Normalteiler.

Fragen wir noch nach der Untergruppe aller mit einem Gruppenelement A vertauschbaren Gruppenelemente, so haben wir zu untersuchen, für welche Elemente B $D(A).D(B) = D(B).D(A)$ gilt. Wir transformieren wieder jede irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ so, daß $D_\nu(A)$ Hauptdiagonalform annimmt ,und zwar genauer so, daß an den ersten a_1 Stellen die Einheitswurzel ε_1, an den folgenden $a_2 - a_1$ Stellen die Einheitswurzel ε_2 steht usw. und $\varepsilon_r \neq \varepsilon_s$ für $r \neq s$ $(1 \leqq r, s \leqq t)$. $D_\nu(A)$ ist dann gewissermaßen entlang der Hauptdiagonale zusammengesetzt aus t Einheitsmatrizen $\mathfrak{E}_r$ vom Grad $a_r - a_{r-1}$ $(a_0 = 0, a_t = n_\nu)$,

die je mit einer Einheitswurzel ε_r multipliziert sind. Sind c_{kl} die Koeffizienten der Matrix $C_\nu = D_\nu(A).D_\nu(B)$, c'_{kl} diejenigen der Matrix $C'_\nu = D_\nu(B).D_\nu(A)$, dann gilt

$$c_{kl} = \varepsilon_r b_{kl} \qquad a_{r-1} < k \leqq a_r,\ 0 < l \leqq n_\nu$$
$$c'_{kl} = \varepsilon_s b_{kl} \qquad 0 < k \leqq n_\nu,\ a_{s-1} < l \leqq a_s.$$

Aus $c_{kl} = c'_{kl}$ folgt für $a_{r-1} < k \leqq a_r$, $a_{s-1} < l \leqq a_s$ mit $r \neq s$

$$(\varepsilon_r - \varepsilon_s)\, b_{kl} = 0$$
$$b_{kl} = 0$$

d. h. ist B mit A vertauschbar, so erscheint $D_\nu(B)$ ganz reduziert und zerfällt der Reihe nach in t Teilmatrizen der Grade $e_1 = a_1$, $e_2 = a_2 - a_1$, $\ldots$, $e_t = n_\nu - a_{t-1}$. Jede beliebige so gebaute Matrix (trivialerweise ist das wieder in jeder Darstellung 1. Grades erfüllt) ist aber, wie man leicht sieht, auch tatsächlich mit $D_\nu(A)$ vertauschbar und wir erhalten

Satz 15:

„Transformiert man jede irreduzible Darstellung höheren als 1. Grades $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ so, daß $D_\nu(A)$ derart in Diagonalform erscheint, daß der Reihe nach in e_r Stellen der Hauptdiagonale die Einheitswurzel ε_r steht und $\varepsilon_r \neq \varepsilon_s$ für $r \neq s$, so sind genau jene Gruppenelemente mit A vertauschbar, deren Substitutionsmatrizen in $\mathfrak{D}_\nu$ der Reihe nach in Teilmatrizen der Grade e_r zerfallen".

Existiert eine treue irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$, so braucht klarerweise nur diese untersucht zu werden. Ist A ein Element des Zentrums, so folgt, daß A in jeder irreduziblen Darstellung durch die mit einer Einheitswurzel multiplizierte Einheitsmatrix dargestellt wird.

Betrachtet man die vorangegangenen Ausführungen in Hinblick auf die eingangs erwähnte Analogie im Bereich der Darstellungstheorie endlicher Gruppen und der Theorie der Diophantischen Approximationen, so erkennt man in Satz 6, der auch Satz I, II und IV als Spezialfälle enthält, das volle Analogon zur allgemeinsten Fassung des Kroneckerschen Approximationssatzes

Satz VI:

„Das reelle Ungleichungssystem

$$|\, \alpha_{\nu 1} x_1 + \ldots + \alpha_{\nu m} x_m - \beta_\nu \,| < \varepsilon \ (mod\ 1) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist dann und nur dann für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ in ganzzahligen $x_1, \ldots, x_m$ lösbar, wenn für jeden Gitterpunkt $(h_1, \ldots, h_n)$, für den gleichzeitig

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \alpha_{\nu\mu} \equiv 0 \pmod 1 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

auch

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \beta_\nu \equiv 0 \pmod 1 \text{ } \textit{gilt}",$$

und in Satz 8 ein weitgehendes Analogon zu einer von *Weyl*[3] stammenden Verfeinerung desselben.

Für abelsche Gruppen ergibt sich ein direkter Zusammenhang entsprechender Sätze, wenn man bedenkt, daß man die einem Element in einer irreduziblen Darstellung zugeordnete Einheitswurzel als Potenz von $e^{i\pi}$ mit rationalem Exponenten schreiben kann. Beispielsweise läßt sich Satz 10 aus Satz VI ableiten, indem man denselben auf diese Exponenten anwendet, wie dies in der Dissertation des Verfassers bereits für Satz IV durchgeführt wurde. Offen bleibt die Frage, ob sich ein solcher direkter Zusammenhang auch zwischen den Sätzen über nichtabelsche Gruppen und ihren Gegenstücken aus der Theorie der Diophantischen Approximationen herstellen läßt.

[3] *H. Weyl*, „Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins". Math. Ann., Bd. **77** (1916).

Beiträge zur numerischen Integration.

III. Nachträge.

Von

Erich Bukovics, Wien.

(Eingelangt am 6. Juli 1954.)

1. Ergänzungen zu den Voraussetzungen in den Teilen I und II.

In den ersten beiden Teilen dieser Arbeit[1] wurden Formeln zur Abschätzung des Fehlers beim *Runge-Kutta*-Verfahren und *Blaess*-Verfahren entwickelt. In den Formeln für die Integrationsfehler treten Größen M_2, M_3 und M_4 auf, die nach den Voraussetzungen [I], (4) und (4*) bzw. [II], (4) obere Schranken der vollständigen Ableitungen zweiter, dritter bzw. vierter Ordnung der die Differentialgleichung definierenden Funktion f im Bereich $\mathfrak{B}$ der Lösungsfunktion und der Näherungen sein sollen. Diese Voraussetzungen bedürfen jedoch einer Ergänzung[2], die im folgenden erläutert werden soll.

Die Schranke M_3 wird in [I] zur Abschätzung der in (33) auftretenden Größen $f'''_{m\,\vartheta_i}$ und $f'''_{k\,\vartheta_j}$ verwendet. Dabei ist $f'''_{k\,\vartheta_j}$ der für ein Argument x des Intervalles $[x_m, x_{m+1}]$ zu nehmende Wert der dritten vollständigen Ableitung von f, während $i^3 f'''_{m\,\vartheta_i}$ die dritte Ableitung von $\hat{f}_{m,i}$ — man vergleiche [I], (16) — nach dessen Argument h für eine Zwischenstelle $\vartheta_i h$ mit $0 \leqq \vartheta_i \leqq 1$ bedeutet:

$$f'''_{k\,\vartheta_j} = \left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right)_{x_m + k\,\vartheta_j h} \quad , \quad i^3 f'''_{m\,\vartheta_i} = \left(\frac{d^3 \hat{f}_{m,i}}{dh^3}\right)_{\vartheta_i h} .$$

Durch die Voraussetzung [I], (4) ist nun sichergestellt, daß M_3 eine

---

[1] „Beiträge zur numerischen Integration. I und II". Mh. f. Math., Bd. 57, Heft 3 und 4. Diese Arbeiten werden im folgenden mit [I] und [II] zitiert.

[2] Der Verfasser wurde darauf von Herrn *J. Albrecht* vom Inst. f. ang. Math. der Univ. Hamburg hingewiesen. Der vom Vorstand des Institutes, Herrn Prof. Dr. *L. Collatz*, vermittelte Briefwechsel hat wesentlich zur Klarstellung beigetragen, wofür der Verfasser den beiden Herren herzlich danken möchte.

Schranke für $f_k'''_{\vartheta_j}$ ist, wodurch im allgemeinen aber noch nicht gewährleistet ist, daß dies auch für alle $f_m'''_{\vartheta_i}$ gilt. Deshalb muß die Voraussetzung (4) in [I], Seite 218 dahingehend ergänzt werden, daß man außer

$$\left|\frac{d^3 f}{dx^3}\right| \leqq M_3 \qquad x_m \leqq x \leqq x_{m+1}$$

noch

$$\left|\frac{d^3 \hat{f}_{m,i}}{dh^3}\right| \leqq i^3 M_3 \qquad i = 1, 2, \ldots, k \tag{1}$$

für alle Argumente zwischen 0 und h zu fordern hat. In gleicher Weise muß für den erweiterten *Blaess'schen* Ansatz in Ergänzung zu [I], (4*), Seite 219 für M_2 noch

$$\left|\frac{d^2 \hat{f}_{m,i}}{dh^2}\right| \leqq i^2 M_2 \qquad i = 1, 2, \ldots, k \tag{2}$$

verlangt werden.

Für das *Runge-Kutta*-Verfahren erkennt man durch analoge Überlegungen, daß die Voraussetzungen [II], (4), Seite 334 durch die Forerungen

$$\left|\frac{d^3 \hat{f}_{m,i}}{dh^3}\right| \leqq j_i^3 M_3, \quad \left|\frac{d^4 \hat{f}_{m,i}}{dh^4}\right| \leqq j_i^4 M_4 \qquad \begin{matrix} j_0 = 0 \\ j_1 = j_2 = \tfrac{1}{2} \\ j_3 = 1 \end{matrix} \tag{3}$$

ergänzt werden müssen.

2. Bestimmung der Schranken M_2, M_3, M_4.

Durch die zusätzlichen Forderungen (1), (2) bzw. (3) ergeben sich für die Bestimmung der entsprechenden Schranken keine neuen grundsätzlichen Schwierigkeiten. Benötigt wird ein Überblick über den Verlauf der Lösungsfunktion y und deren Ableitungen bis zur Ordnung $(n-1)$ in dem in Frage kommenden Bereiche. Für das *Runge-Kutta*-Verfahren[3] hat man zunächst $\frac{d^3 f}{dx^3}$, $\frac{d^4 f}{dx^4}$ in der üblichen Weise durch Differenzieren von f nach x und Ersetzen der höheren Ableitungen nach der Differentialgleichung abzuschätzen. Die Schranken für $\frac{d^3 \hat{f}_{m,i}}{dh^3}$ und $\frac{d^4 \hat{f}_{m,i}}{dh^4}$ hingegen bestimmt man durch Einsetzen der Argumente, wodurch man eine

[3] Für das *Blaess*-Verfahren gelten ähnliche Überlegungen.

Funktion von h erhält. Als Koeffizienten treten die wahren Werte $\bar{y}_m, \bar{y}_m', \ldots, \bar{y}_m^{(s-1)}$ auf.

Für das Beispiel 1 von [II], Seite 346 geht die Abschätzung etwa so vor sich:

Differentialgleichung: $y'' = -0.3\,y' + 0.1\,y$,
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1,\ y'(0) = 0.5$,
Schrittweite: $h = 0.2$.

Die Abschätzung des Integrationsfehlers ist für den Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ durchzuführen, für den die Ungleichungen

$$1 \leqq \bar{y} \leqq 1.5$$
$$0.4 \leqq \bar{y}' \leqq 0.6$$

gelten. Daraus ergibt sich zunächst

$$\left|\frac{d^3 f}{dx^3}\right| \leqq 0.015, \quad \left|\frac{d^4 f}{dx^4}\right| \leqq 0.007. \tag{4}$$

Zur Abschätzung der Ableitungen der $\hat{f}_{m,i}$ bildet man:

$$\hat{f}_{m,0} = -0.3\,\bar{y}_m' + 0.1\,\bar{y}_m, \quad \frac{d\hat{f}_{m,0}}{dh} = \frac{d^2\hat{f}_{m,0}}{dh^2} = \frac{d^3\hat{f}_{m,0}}{dh^3} = \frac{d^4\hat{f}_{m,0}}{dh^4} = 0$$

$$\hat{f}_{m,1} = -0.3\,\bar{y}_m' - 0.3\,\hat{f}_{m,0}\frac{h}{2} + 0.1\,\bar{y}_m + 0.1\,\bar{y}_m'\frac{h}{2} + 0.1\,\hat{f}_{m,0}\frac{h^2}{8}$$

$$\frac{d\hat{f}_{m,1}}{dh} = -0.15\,\hat{f}_{m,0} + 0.05\,\bar{y}_m' + 0.1\,\hat{f}_{m,0}\frac{h}{4}$$

$$\frac{d^2\hat{f}_{m,1}}{dh^2} = -0.025\,\hat{f}_{m,0}, \quad \frac{d^3\hat{f}_{m,1}}{dh^3} = \frac{d^4\hat{f}_{m,1}}{dh^4} = 0, \text{ u. s. w.}$$

Man erhält sukzessive für die dritten Ableitungen 0,0.032, 0.07 und für die vierten Ableitungen 0, 0, 0.023 als Schranken, woraus man zusammen mit (4) die Abschätzungen

$$M_3 = 0.07, \quad M_4 = 0.023 \tag{5}$$

gewinnt. Daraus kann man nach [II], (29) für die Integrationsfehler

$$J_0 = 34 \cdot 10^{-8}, \quad J_1 = 2.5 \cdot 10^{-8}$$

errechnen. Als Fehlerschranke für den ersten Schritt ergibt sich daraus:[4]

$$\text{Fehler von } y : 34 \cdot 10^{-8} \quad (14.7 \cdot 10^{-8}) \tag{6}$$

[4] In den Klammern sind die auf Seite 346 von [II] gefundenen Fehlerschranken zum Vergleich angeführt.

Fehler von y' : $7.5 \cdot 10^{-8}$ ($6.5 \cdot 10^{-8}$).

Es ergibt sich somit ein ungünstigeres Ergebnis. Im nächsten Abschnitt wird jedoch durch Anwendung einer etwas modifizierten Formel für den Integrationsfehler gezeigt werden, daß die in [II], Seite 346 angegebenen Fehlerschranken trotzdem richtig sind.

Bei Durchführung der ergänzenden Rechnungen für das Verfahren von *Blaess* zeigt es sich, daß die in [II], Seite 346 dafür angegebenen Fehlerschranken keine Änderungen erfahren. Das gleiche gilt (für beide Verfahren) bezüglich des Beispieles 2 in [II], Seite 346.

3. Der Integrationsfehler beim Runge-Kutta-Verfahren.

Verwendet man die sich bei der Abschätzung der Ableitung der $\hat{f}_{m,i}$ beim *Runge-Kutta*-Verfahren ergebenden Schranken einzeln, so erhält man eine Formel für den Integrationsfehler, die meist günstigere Ergebnisse liefert.

Genügen nämlich die Größen N_3^i, N_4^i, N_3, N_4 den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \left|\frac{d^3 f}{dx^3}\right| &\leqq N_3, & \left|\frac{d^3 \hat{f}_{m,i}}{dh^3}\right| &\leqq N_3^i \\ \left|\frac{d^4 f}{dx^4}\right| &\leqq N_4, & \left|\frac{d^4 \hat{f}_{m,i}}{dh^4}\right| &\leqq N_4^i, \end{aligned} \tag{7}$$

so erhält man aus [II], (27a, b) anstatt (29) für den Integrationsfehler die Formel:

$$J_{n-p} = \begin{cases} \dfrac{10 N_4^1 + 10 N_4^2 + 5 N_4^3 + 6 N_4}{(n-1)!\ 720} h^{n+4} & p = 1 \\ \dfrac{p}{3}(N_3^1 + N_3^2) + \dfrac{1}{6}\left|2-p\right| N_3^3 + \dfrac{1}{p+3} N_3 \\ \hline (n-p)!\ (p+2)! \end{cases} h^{n+3} \quad p = 2, 3, \ldots, n \tag{8}$$

In dem Beispiel von Abschnitt 2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} N_3^1 &= 0, & N_3^2 &= 0.04, & N_3^3 &= 0.07, & N_3 &= 0.015, \\ N_4^1 &= 0, & N_4^2 &= 0\ , & N_4^3 &= 0.023, & N_4 &= 0.007, \end{aligned}$$

also:

$$J_0 = 8 \cdot 10^{-8},\ J_1 = 1.3 \cdot 10^{-8}$$

und damit als Fehler für den ersten Schritt[4]

Fehler von y: $8 \cdot 10^{-8}$ ($14.7 \cdot 10^{-8}$),

Fehler von y': $6.5 \cdot 10^{-8}$ ($6.5 \cdot 10^{-8}$).

4. Der Integrationsfehler beim ursprünglichen Blaess'schen Ansatz.

Im Falle des ursprünglichen *Blaess'schen* Ansatzes läßt sich — wie in Abschnitt 8 von [II] kurz angedeutet — durch eine andere Erweiterung als die in [I], (21) benützte eine Formel für den Integrationsfehler angeben, für die nur Schranken der vollständigen Ableitungen von f nach x benötigt werden[5]. Dies soll im folgenden kurz ausgeführt werden.

Außer den Voraussetzungen [I], (3) und (3a) sollen in $\mathfrak{B}$ die Abschätzungen

$$\left|\frac{df}{dx}\right| \leqq \overline{M}_1, \quad \left|\frac{d^2 f}{dx^2}\right| \leqq \overline{M}_2 \tag{9}$$

gelten. An Stelle von [I], (21) soll die Erweiterung

$$\begin{aligned}\eta_{m+1}^{j} = &\Big\{\sum_{\sigma=j}^{n-1} \binom{\sigma}{j} k^{\sigma-j} (v_m^{\sigma} - \bar{v}_m^{\sigma})\Big\} + \Big\{\sum_{i=0}^{k} \overline{A}_i^{j} (\tilde{f}_{m,i} - \hat{f}_{m,i}) \frac{h^n}{n!}\Big\} + \\ &+ \Big\{\sum_{i=0}^{k} \overline{A}_i^{j} (\hat{f}_{m,i} - \bar{f}_{m,i}) \frac{h^n}{n!}\Big\} + \Big\{\sum_{i=0}^{k} \overline{A}_i^{j} \bar{f}_{m,i} \frac{h^n}{n!} - A\Big\} \qquad (10) \\ &= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{II}' + \mathrm{III}'.\end{aligned}$$

benützt werden. Die Abschätzung von I und II kann in gleicher Weise wie in [I] durchgeführt werden, wodurch sich die Formeln [I], (22) und (31) ergeben.

a) *Abschätzung von II'*:

Durch Anwendung der *Lipschitz*bedingung erhält man zunächst

$$|\hat{f}_{m,i} - \bar{f}_{m,i}| \leqq K \sum_{\nu=0}^{n-1} |\zeta_{m,i}^{\nu}|, \tag{11}$$

wobei

$$\zeta_{m,i}^{\nu} = \hat{y}_{m,i}^{(\nu)} - \bar{y}_{m,i}^{(\nu)} \tag{12}$$

gesetzt wurde. Durch Vergleich von

$$\hat{y}_{m,i}^{(j)} = \sum_{\sigma=j}^{n-1} \hat{y}_{m,i-1}^{(\sigma)} \frac{h^{\sigma-j}}{(\sigma-j)!} + \hat{f}_{m,i-1} \frac{h^{n-j}}{(n-j)!} \tag{13}$$

mit der Taylorentwicklung von $\hat{y}_{m,i}^{j}$ bezüglich des Argumentes $x_{m,i-1}$:

---

[5] Für das *Runge-Kutta*-Verfahren wurden von *J. Albrecht* (in einer demnächst erscheinenden Arbeit) Fehlerabschätzungen für Differentialgleichungen erster und Spezialfälle von Differentialgleichungen zweiter Ordnung entwickelt, die sehr gute Ergebnisse liefern und für die ebenfalls nur vollständige Ableitungen von f benötigt werden.

$$\bar{y}^{(j)}_{m,i} = \sum_{\sigma=j}^{n-1} \bar{y}^{(\sigma)}_{m,i-1} \frac{h^{\sigma-j}}{(\sigma-j)!} + \bar{f}_{m,i-1} \frac{h^{n-j}}{(n-j)!} + f'_{\vartheta_j} \frac{h^{n-j+1}}{(n-j+1)!}, \tag{14}$$

wobei $f'_{k\vartheta_j}$ den Wert der ersten vollständigen Ableitung von f an einer Zwischenstelle bedeutet, erhält man durch ähnliche Überlegungen wie in [I], Abschnitt 5 unter Benützung von (9):

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \left| \zeta^{\sigma}_{m,i} \right| \leqq \alpha \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left| \zeta^{\sigma}_{m,i-1} \right| + \bar{M}_1 \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{h^{n-j+1}}{(n-j+1)!} \tag{15}$$

mit

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \left| \zeta^{\sigma}_{m,0} \right| = 0, \tag{16}$$

woraus man die direkte Formel

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \left| \zeta^{\sigma}_{m,i} \right| \leqq \frac{1-\alpha^i}{1-\alpha} \bar{M}_1 \tfrac{1}{2} \frac{1-(h/3)^n}{1-h/3} h^2$$

oder (unter der wohl immer erfüllten Voraussetzung $h < 3$)

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \left| \zeta^{\sigma}_{m,i} \right| \leqq \frac{1-\alpha^i}{1-\alpha} \bar{M}_1 \frac{3}{2\,(3-h)} h^2, \tag{17}$$

wobei α die durch [I], (27) erklärte Bedeutung hat. Durch Einsetzen von (17) in (11) gewinnt man für II′ die Abschätzung:

$$|\,\mathrm{II}'\,| \leqq \frac{3\,K\bar{M}_1}{2\,(\alpha-1)\,(3-h)\,n!} h^{n+2} \left[\sum_{i=0}^{k} \left| \bar{A}^j_i \right| \alpha_i - \sum_{i=0}^{k} \left| \bar{A}^j_i \right| \right]. \tag{18}$$

Unter der Voraussetzung[6] $\bar{A}^j_i > 0$ kann man daraus durch Benützung der Gleichungen [I], (34)

$$|\,\mathrm{II}'\,| \leqq \frac{3\,K\bar{M}_1}{2\,(\alpha-1)\,(3-h)\,n!} h^{n+2} \left[\beta_j - \binom{n}{j} k^{n-j}\right] \tag{19}$$

erhalten. Die β_j sind durch [I], (32) erklärt und für Differentialgleichungen zweiter, dritter und vierter Ordnung in [I] tabelliert.

b) Abschätzung von III′:

---

[6] Diese Voraussetzungen sind bei den für $n = 2, 3, 4$ in [I] angegebenen Formelsätzen erfüllt.

[7] In der Formel [I]. (34) ist auf der rechten Seite irrtümlich der Faktor $\binom{n+\varphi}{\varphi}$ gesetzt worden, der richtig $\binom{n+\varphi}{j}$ heißen muß. Außerdem ist in [I], Seite 235, Zeile 9 von unten in der Formel für $\tilde{v}_{m,i}\,h$ richtig zu setzen:

$$\tilde{v}_{m,i}\,h = \tilde{v}_{m,i-1}\,h + 2\,\tilde{\alpha}_{m,i-1} + 3\,\tilde{\beta}_{m,i-1}.$$

Setzt man in (11) die Taylorentwicklungen der $\bar{f}_{m,i}$ bezüglich des Argumentes x_m und für A die Glieder n-ter und höherer Ordnung der Taylorentwicklungen von $\bar{y}^{(j)}_{m+1}$ ein, so fallen die Glieder bis zur Ordnung $(n+1)$ wegen der Gleichungen [I], (34)[7] weg, so daß man III′ wegen der Voraussetzung (9) mit

$$|\,\mathrm{III}'\,| \leqq \frac{\overline{M}_2}{(n+2)!}\, h^{n+2}\left[\binom{n+2}{2}\sum_{i=0}^{k} i^2\,|\,\overline{A}_i^j\,| + \binom{n+2}{j}\, k^{n-j+2}\right] \tag{20}$$

abschätzen kann. Setzt man wieder $\overline{A}_i^j > 0$ voraus[6], so ergibt sich nach [I], (34):

$$|\,\mathrm{III}'\,| \leqq \frac{2\,\overline{M}_2\, k^{n-j+2}}{j!\,(n-j+2)!}\, h^{n+2}. \tag{21}$$

c) Gesamtabschätzung des Integrationsfehlers:

(19) und (21) ermöglichen nun die folgende Abschätzung des Integrationsfehlers:

$$\boxed{J_j = h^{n+2}\left[\frac{2\,\overline{M}_2\, k^{n-j+2}}{j!\,(n-j+2)!} + \frac{3\,K\overline{M}_1}{2\,(\alpha-1)\,(3-h)\,n!}\,(\beta_j - \tbinom{n}{j}\, k^{n-j})\right]} \tag{22}$$

die an Stelle von [I], (36) verwendet werden kann und nur noch Schranken für die vollständigen Ableitungen von f nach x enthält. k ist dabei die Zahl der Teilschritte; sie ist für die in [I] zugrundegelegten Formelsätze 5 im Falle der Differentialgleichungen zweiter Ordnung und 4 für Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung.

Man kann unter Umständen eine günstigere Abschätzung erhalten, wenn man in (11) bei den Taylorentwicklungen noch Glieder von der Ordnung $(n+3)$ berücksichtigt. Dann fallen auch die Glieder der Ordnung $(n+2)$ weg und man kann unter der Voraussetzung

$$\left|\frac{df}{dx}\right| \leqq \overline{M}_1, \quad \left|\frac{d^3 f}{dx^3}\right| \leqq \overline{M}_3 \text{ in } \mathfrak{B} \tag{23}$$

den Integrationsfehler durch

$$\boxed{\begin{aligned} J_j = {} & \frac{3\,K\overline{M}_1}{2\,(\alpha-1)\,(3-h)\,n!}\,(\beta_j - \tbinom{n}{j}\, k^{n-j})\, h^{n+2} + \\ & + \left[\frac{k^{n-j+3}}{j!\,(n-j+3)!} + \frac{\sum_{i=0}^{k} i^3\,|\,\overline{A}_i^j\,|}{n!\,3!}\right]\overline{M}_3\, h^{n+3} \end{aligned}} \tag{24}$$

abschätzen. Die Koeffizienten von $\overline{M}_3 h^{n+3}$ stimmen mit denen von $M_3 h^{n+3}$ in [I], (36) überein und können daher für $n = 2, 3, 4$ aus [I], Abschnitt 9 entnommen werden.

Für den erweiterten *Blaess'schen* Ansatz und für das *Runge-Kutta*-Verfahren kann der hier angegebene Weg im Prinzip ebenfalls verwendet werden, wodurch man zu Formeln gelangen würde, die wohl die Abschätzung der Ableitungen der $\hat{f}_{m,i}$ ersparen würden, andererseits aber nicht die richtige Ordnung des Integrationsfehlers ergeben würden.

Die birationalen Transformationen der Polynomideale.

Von

W. Gröbner, Innsbruck.

(Eingelangt am 20. Juli 1954.)

In der projektiven Geometrie werden die Eigenschaften der geometrischen Gebilde untersucht, die invariant sind gegenüber der Gruppe der *projektiven Transformationen*, das sind die linearen homogenen Substitutionen der projektiven Koordinaten. In der algebraischen Geometrie geht man einen Schritt weiter: man sucht die invarianten Eigenschaften gegenüber allen umkehrbaren rationalen Transformationen des Gebildes. Diese umfassen nicht nur die *projektiven Transformationen*, sondern auch die allgemeinere Gruppe der *Cremona-Transformationen*, das sind die umkehrbaren rationalen Transformationen des Raumes in sich, oder, wie man sie am besten analytisch charakterisieren kann, die Automorphismen eines rationalen Funktionenkörpers $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

In der Tat bedeutet eine Substitution

$$y_i \to \varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) \in K(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

eine Abbildung des rationalen Funktionenkörpers $K(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ auf den Körper $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, die eine Isomorphie ist, wenn es eine inverse Abbildung gibt:

$$x_j \to \psi_j(y), \quad \psi_j(y) \in K(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad j = 1, \ldots, n \tag{1'}$$

welche die Bedingungen

$$\psi_j(\varphi(x)) = x_j, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

erfüllen.

Daraus folgt, daß $K(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) = K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und also die Funktionen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ algebraisch unabhängig über K sind. Setzt man (2) in $\varphi_i(x)$ ein, so erhält man

$$\varphi_i(\psi(\varphi(x))) = \varphi_i(x), \qquad i = 1, \ldots, n$$

und wegen der algebraischen Unabhängigkeit der $\varphi_i(x)$ die zu (2) entsprechenden Gleichungen

$$\varphi_i(\psi(y)) = y_i, \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (2')$$

Identifiziert man den Körper $K(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ mit $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, indem man $y_i = x_i$ setzt, so bedeuten (1) und (1') eine isomorphe Abbildung des Körpers $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in sich, d. h. einen Automorphismus. Deutet man diese Abbildungen im Koordinatenraum R_n, so sind es rationale Transformationen der Koordinaten eines Punktes, die im allgemeinen eindeutig umkehrbar sind.

Ganz analog wie die Cremona-Transformationen als Automorphismen eines rationalen Funktionenkörpers definiert werden können, so kann man auch die birationalen Transformationen als isomorphe Abbildungen eines algebraischen Funktionenkörpers charakterisieren.

Alle algebraischen Funktionenkörper, die isomorph aufeinander abgebildet werden können, bilden eine *Klasse birational äquivalenter Körper*, entsprechend einer *Klasse birational äquivalenter algebraischer Mannigfaltigkeiten*. Die Aufgabe der algebraischen Geometrie besteht vorwiegend darin, alle gegenüber diesen isomorphen Abbildungen invarianten Eigenschaften zu ermitteln und geometrisch zu interpretieren.

Einen algebraischen Funktionenkörper können wir uns immer als *Restklassenkörper* (d. h. Quotientenkörper des Restklassenringes) eines mindestens eindimensionalen Primideals $\mathfrak{p}$ in einem Polynomring $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ gegeben denken. Zwei Primideale, deren Restklassenkörper isomorph sind, nennen wir *birational äquivalent*.

Im folgenden sollen zunächst die rationalen Transformationen der Polynomideale behandelt und allgemeine Sätze darüber ausgesprochen werden. Es zeigt sich hier, daß die *charakteristische Funktion von Hilbert* („*Hilbertfunktion*") ein besonders brauchbares Mittel an die Hand gibt, um die Veränderung bei rationalen Transformationen zu verfolgen.

In den nächsten Abschnitten werden die umkehrbaren rationalen, d. h. birationalen Transformationen eines Polynomideals untersucht. Hier zeigt sich vor allem, daß die unübersehbare Mannigfaltigkeit dieser Transformationen auf zwei wichtige Gattungen zurückgeführt werden kann, nämlich auf *Veronesesche Transformationen* und *Projektionen* (d. s. Eliminationen). *Jede birationale Transformation kann erzeugt werden durch eine Veronesesche Transformation, eine projektive Transformation und eine Projektion.*

Damit ist die Untersuchung der birationalen Transformationen im wesentlichen auf die Untersuchung der Projektionen zurückgeführt, da die *Veroneseschen* und die projektiven Transformationen bereits sehr gut beherrscht werden können.

Der vorletzte Abschnitt behandelt die *birationalen Invarianten*, die von der *Hilbert*funktion abgeleitet werden können. Es gibt bei einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit d solche Größen, deren Invarianz gegenüber regulären birationalen Transformationen unmittelbar ersichtlich ist; um sie zu absoluten Invarianten zu machen, wird man noch Korrekturglieder hinzufügen müssen, die von den Singularitäten der Mannigfaltigkeit abhängen.

Im letzten Abschnitt wird eine birationale Transformation angegeben, welche eine *beliebige vorgegebene Singularität auflöst*, und das allgemeine Problem der Auflösung der Singularitäten einer algebraischen Mannigfaltigkeit gestreift.

I. Rationale Transformationen.

In allen Untersuchungen der algebraischen Geometrie, wie auch schon der projektiven Geometrie, die nicht lokaler Natur sind, empfiehlt sich die Anwendung von homogenen Koordinaten, um das Gebilde in seiner ganzen Ausdehnung und abgeschlossen erfassen zu können. Wir werden daher im folgenden durchaus mit homogenen Idealen (H-Idealen) in homogenen Polynomringen (H-Ringen) arbeiten[1], und zwar legen wir einen H-Ring $K[x] = K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ zugrunde, dessen Ideale mit $\mathfrak{a}_x, \mathfrak{b}_x, \mathfrak{p}_x, \ldots$ bezeichnet werden, sowie einen zweiten H-Ring $K[y] = K[y_0, y_1, \ldots, y_m]$, dessen Ideale $\mathfrak{a}_y, \mathfrak{b}_y, \mathfrak{p}_y, \ldots$ seien.

Die Anzahl der Unbestimmten x und y braucht nicht übereinzustimmen; jedoch muß der Grundkörper K bei beiden H-Ringen derselbe sein. Im übrigen ist K keiner Einschränkung unterworfen, insbesondere darf die Charakteristik beliebig sein; in einzelnen Fällen, wo eine Einschränkung notwendig ist, wird dies besonders vermerkt werden.

Eine rationale Transformation der Ideale aus $K[x]$ in die Ideale aus $K[y]$ wird durch eine Substitution

$$y_i \to \varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) \in K[x], \qquad i = 0, 1, \ldots, m \tag{3}$$

[1] Hinsichtlich der Bezeichnungen und der idealtheoretischen Begriffe verweise ich auf mein Buch: Moderne algebraische Geometrie. Springer-Verlag, Wien, 1949. Im folgenden zitiert mit „MAG".

bewirkt, wo die $\varphi_i(x)$ Formen *desselben* Grades aus $K[x]$ bedeuten, wenn man festsetzt, daß *irgendein Ideal* $\mathfrak{a}_x$ *des H-Ringes* $K[x]$ *in dasjenige Ideal* $\mathfrak{a}_y$ *des H-Ringes* $K[y]$ *transformiert wird, welches alle Formen* $\Phi(y) \in K[y]$ *enthält, die* $\Phi(\varphi(x)) \in \mathfrak{a}_x$ *erfüllen*:

$$\mathfrak{a}_x \to \mathfrak{a}_y = \{\Phi(y)\} \text{ mit } \Phi(\varphi(x)) \in \mathfrak{a}_x. \tag{4}$$

Man bestätigt leicht, daß die Menge aller dieser Formen $\Phi(y)$ tatsächlich ein H-Ideal bildet, das insbesondere *immer ein Primideal ist, falls* $\mathfrak{a}_x$ *Primideal ist*. Ist nämlich etwa $\Phi_1(y) \cdot \Phi_2(y) \in \mathfrak{a}_y$, so muß $\Phi_1(\varphi(x)) \cdot \Phi_2(\varphi(x)) \in \mathfrak{a}_x$ gelten, und da $\mathfrak{a}_x$ als Primideal vorausgesetzt ist, muß bereits ein Faktor, etwa $\Phi_1(\varphi(x)) \in \mathfrak{a}_x$ sein. Daraus folgt nun umgekehrt $\Phi_1(y) \in \mathfrak{a}_y$, so daß $\mathfrak{a}_y$ ebenfalls als Primideal nachgewiesen ist.

Ebenso leicht findet man die folgenden Eigenschaften einer rationalen Transformation[2]: *Ist* $\mathfrak{q}_x$ *ein zum Primideal* $\mathfrak{p}_x$ *gehöriges Primärideal, so ist das transformierte Ideal* $\mathfrak{q}_y$ *ein zum transformierten Primideal* $\mathfrak{p}_y$ *gehöriges Primärideal (das auch mit* $\mathfrak{p}_y$ *zusammenfallen kann).*

Aus $\mathfrak{a}_x \subset \mathfrak{b}_x$ *folgt für die transformierten Ideale* $\mathfrak{a}_y \subseteq \mathfrak{b}_y$.

Dem Durchschnitt $\mathfrak{a}_x \cap \mathfrak{b}_x$ *zweier Ideale entspricht der Durchschnitt* $\mathfrak{a}_y \cap \mathfrak{b}_y$ *der transformierten Ideale.*

Es ist klar, daß man zwei oder mehr rationale Transformationen hintereinander ausführen kann und daß das Endergebnis wieder eine rationale Transformation ist.

Die oben definierte Transformation der H-Ideale steht auch im Einklang mit der üblichen Weise, mit der man eine rationale Transformation geometrischer Gebilde zu verstehen gewohnt ist. Beschreibt nämlich der Punkt P mit den homogenen Koordinaten $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ die Nullstellen des Ideals $\mathfrak{a}_x$, so beschreibt der transformierte Punkt P' $\{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m\}$ mit den homogenen Koordinaten $\eta_i = \varphi_i(\xi)$ Nullstellen des transformierten Ideals $\mathfrak{a}_y$. Dabei sind diejenigen Punkte P, für welche alle Formen $\varphi_i(\xi) = 0$ sind, auszunehmen; auch kann nicht behauptet werden, daß der Punkt P' sämtliche Nullstellen von $\mathfrak{a}_y$ beschreibt. In präziser Formulierung können wir diese Behauptung so aussprechen:

Wenn das Ideal $\mathfrak{a}_x$ *eine Nullstelle* $P\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *hat, so hat das transformierte Ideal* $\mathfrak{a}_y$ *die transformierte Nullstelle* $P'\{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m\}$ *mit* $\eta_i = \varphi_i(\xi)$, *vorausgesetzt, daß nicht alle* $\varphi_i(\xi)$ *verschwinden*[3].

[2] Vgl. auch meine Arbeit: Über eine neue idealtheoretische Grundlegung der algebraischen Geometrie. Math. Ann. **115** (1938), 333—358, S. 349f.

[3] Die Größen ξ gehören dem Grundkörper K oder einer geeignete Erweiterung desselben an.

Zum Beweise beachte man, daß

$$\mathfrak{a}_x \subseteq \mathfrak{p}_x = (\ldots, \xi_i x_k - \xi_k x_i, \ldots)$$

gilt, wo $\mathfrak{p}_x$ das von sämtlichen Linearformen $\xi_i x_k - \xi_k x_i$ erzeugte Primideal mit der einzigen Nullstelle P ist; $\mathfrak{p}_x$ enthält alle Formen aus $K[x]$, welche in P verschwinden. Das Primideal $\mathfrak{p}_x$ wird nun vermöge (3) in das Primideal $\mathfrak{p}_y = (\ldots, \eta_i y_k - \eta_k y_i, \ldots)$ transformiert, denn die Form $\eta_i \varphi_k(x) - \eta_k \varphi_i(x) = \varphi_i(\xi)\varphi_k(x) - \varphi_k(\xi)\varphi_i(x)$ verschwindet in P und ist daher in $\mathfrak{p}_x$ enthalten. Da ferner $\mathfrak{a}_y \subseteq \mathfrak{p}_y$ gelten muß, ist die Behauptung bewiesen.

Bei einer rationalen Transformation (3) werden also die Ideale des H-Ringes $K[x]$ *eindeutig* auf die Ideale des H-Ringes $K[y]$ abgebildet, und zwar so, daß ihre Nullstellengebilde eben derselben rationalen Transformation unterworfen werden. Aus rein geometrischen Überlegungen wird man daher vermuten, daß die Dimension der Ideale, beziehungsweise ihrer Nullstellengebilde bei einer rationalen Transformation im allgemeinen erhalten bleibt.

Darauf gibt der folgende Satz eine erste Antwort, bei dem allerdings vorausgesetzt werden muß, daß der Grundkörper K die Charakteristik 0 habe:

SATZ 1. *Wenn das Primideal* $\mathfrak{p}_x = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ *aus* $K[x]$ *die Dimension* d *hat, so hat das transformierte Primideal* $\mathfrak{p}_y$ *in* $K[y]$ *die Dimension* $\delta = d - \alpha \leqq d$, *wo* $\alpha = n - \sigma + 1$ *ist und* σ *den* (mod $\mathfrak{p}_x$)*-Rang der Matrix*

$$\left(\frac{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}}{\frac{\partial p_l}{\partial x_k}}\right) \qquad \begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, m, \\ k = 0, 1, \ldots, n, \\ l = 1, 2, \ldots, s. \end{matrix}$$

bedeutet[4].

Aus diesem Satz, für dessen Beweis wir auf die zitierte Arbeit verweisen, geht hervor, daß die Dimension eines H-Ideals bei einer rationalen Transformation im allgemeinen invariant bleibt, und falls sie sich ändert, höchstens geringer wird, aber nie zunimmt. Es kann also bei einer rationalen Transformation wohl etwa eine Kurve in einen Punkt transformiert werden, aber nicht umgekehrt. Das gilt sinngemäß auch für birationale Transformationen von algebraischen Mannigfaltigkeiten, bei denen im allgemeinen längs gewisser Untermannigfaltigkeiten die

[4] Vgl. die in Anm. [2] zitierte Arbeit, S. 350.

eindeutige Umkehrbarkeit der Transformation gestört ist. Diese Ausnahmemannigfaltigkeiten werden bei der Transformation notwendig auf solche geringerer Dimension abgebildet, oder sie verschwinden überhaupt, d. h. es entspricht ihnen kein Bildpunkt. Dabei ist zu beachten, daß die Punkte einer Ausnahmemannigfaltigkeit vielfach nicht selbst Bilder irgendwelcher eigentlicher Punkte, sondern nur Grenzlagen von Bildern eigentlicher Punkte der birational entsprechenden Mannigfaltigkeit sind.

Einen viel allgemeineren und aufschlußreicheren Satz erhält man aber, wenn man die *Hilbertfunktionen* $H(t; \mathfrak{a}_x)$, $H(t; \mathfrak{a}_y)$ der beiden Ideale $\mathfrak{a}_x$ und $\mathfrak{a}_y$ heranzieht. Die *Hilbert*funktion eines H-Ideals ist definiert für alle Werte $t = 0, 1, 2, \ldots$ und gibt an, wie viele (mod $\mathfrak{a}_x$)-linear unabhängige Formen des Grades t existieren[5]. Man weiß, daß diese Funktion für genügend große Werte der Variablen t durch ein Polynom des Grades d in t dargestellt wird, das zweckmäßig auf eine der drei folgenden Arten angeschrieben wird:

$$H(t; \mathfrak{a}_x) = h_0\binom{t}{d} + h_1\binom{t}{d-1} + \ldots + h_d, \tag{5}$$

$$H(t; \mathfrak{a}_x) = k_0\binom{t+d}{d} + k_1\binom{t+d-1}{d-1} + \ldots + k_d, \tag{5'}$$

$$H(t; \mathfrak{a}_x) = g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \ldots + g_d t^d. \tag{5''}$$

Wir werden uns im allgemeinen auf die erste Darstellung beziehen. Es ist wohlbekannt, daß die Koeffizienten $h_0, h_1, \ldots, h_d$, die „*Hilbertkoeffizienten* des H-Ideals $\mathfrak{a}_x$", und ebenso die Koeffizienten $k_0, k_1, \ldots, k_d$ ganze rationale Zahlen sind, von denen schon *Hilbert* in seiner grundlegenden Arbeit[6] vermutet, daß sie „mit den von *M. Noether* definierten und behandelten Geschlechtszahlen des Gebildes in engem Zusammenhange stehen". Der Grad d der *Hilbert*funktion ist gleich der Dimension des H-Ideals $\mathfrak{a}_x$.

Bei allen Entwicklungen und Sätzen, welche die *Hilbert*funktion betreffen, brauchen keinerlei Einschränkungen hinsichtlich des Grundkörpers K gemacht werden; K darf also auch eine beliebige Charakteristik haben. Dann gilt der folgende Satz:

SATZ 2. *Die Hilbertfunktion* $H(t; \mathfrak{a}_y)$ *eines H-Ideals* $\mathfrak{a}_y$ *in* $K[y]$, *welches vermöge der rationalen Transformation* (3) *dem H-Ideal* $\mathfrak{a}_x$ *in* $K[x]$ *entspricht, steht mit dessen Hilbertfunktion in der folgenden Beziehung*:

---

[5] Vgl. MAG, § 4, S. 154ff.

[6] *D. Hilbert*, Über die Theorie der algebraischen Formen. Math. Ann. **36** (1890), 520.

$$H(t; \mathfrak{a}_y) = H(\mu t; \mathfrak{a}_x) - H(\mu t; \mathfrak{a}_x + \mathfrak{u}^t), \tag{6}$$

wo μ *den Grad der Formen* $\varphi_i(x)$ *der rationalen Transformation* (3) *bedeutet und*

$$\mathfrak{u} = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$$

das von ihnen erzeugte H-Ideal ist.[7]

Zum Beweise beachte man, daß eine Reihe (mod $\mathfrak{a}_y$)-linear unabhängiger Formen des Grades t in $K[y]$ durch die Substitution (3) in ebensoviele (mod $\mathfrak{a}_x$)-linear unabhängige Formen des Grades μt in $K[x]$ übergeführt werden, welche im Ideal $\mathfrak{u}^t$ liegen. Von der ersten Gattung gibt es nun im ganzen $H(t; \mathfrak{a}_y)$ Formen, von der zweiten aber $V(\mu t; \mathfrak{u}^t) - V(\mu t; \mathfrak{a}_x \cap \mathfrak{u}^t)$, oder auf die *Hilbert*funktion umgerechnet[8]

$$H(\mu t; \mathfrak{a}_x \cap \mathfrak{u}^t) - H(\mu t; \mathfrak{u}^t).$$

Diese beiden Anzahlen müssen einander gleich sein, weil auch umgekehrt einer linear unabhängigen Reihe der zweiten Gattung eine ebensolche der ersten Gattung entspricht; also gilt

$$H(t; \mathfrak{a}_y) = H(\mu t; \mathfrak{a}_x \cap \mathfrak{u}^t) - H(\mu t; \mathfrak{u}^t), \tag{6'}$$

eine Formel, welche mit Hilfe der allgemein gültigen Relation

$$H(t; \mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + H(t; \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = H(t; \mathfrak{a}) + H(t; \mathfrak{b})$$

leicht in die zu beweisende Formel (6) übergeführt werden kann.

Aus diesem zweiten Satz kann man viel mehr entnehmen als aus dem ersten, weil die *Hilbert*funktion nicht nur über die Dimension, sondern z. B. auch über die *Ordnung* (durch den ersten *Hilbert*koeffizienten $h_0 = k_0$) und über das von *Severi* definierte *virtuelle arithmetische Geschlecht* etwas aussagt. Die Schwierigkeiten liegen vor allem bei der Berechnung des zweiten Gliedes $H(\mu t; \mathfrak{a}_x + \mathfrak{u}^t)$.

II. Birationale Transformationen.

Wir nennen die rationale Transformation (3) „*birational für das Primideal* $\mathfrak{p}_x$", wenn es eine *inverse* Transformation

$$x_j \to \psi_j(y), \quad \psi_j(y) \in K[y], \qquad j = 0, 1, \ldots, n \tag{7}$$

[7] Dieser Satz ist bereits in meiner Arbeit: Über das Verhalten der *Hilbertfunktion* eines H-Ideals bei rationalen Transformationen, Archiv d. Math. **5** (1954), 1—3, enthalten.

[8] $V(t; \mathfrak{a}_x)$ bedeutet die Anzahl linear unabhängiger Formen, die im H-Ideal $\mathfrak{a}_x$ enthalten sind (MAG, S. 155); also $H(t; \mathfrak{a}_x) + V(t; \mathfrak{a}_x) = \binom{t+n}{n}$.

gibt, wo die $\psi_j(y)$ Formen desselben Grades aus $K[y]$ sind, welche die Kongruenzen erfüllen:

$$\psi_j(\varphi(x)) \equiv x_j M(x) \ (\mathfrak{p}_x), \quad M(x) \not\equiv 0 (\mathfrak{p}_x), \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Wird das Primideal $\mathfrak{p}_x$ vermöge (3) in das Primideal $\mathfrak{p}_y$ transformiert, *so wird* $\mathfrak{p}_y$ *durch* (7) *wieder in* $\mathfrak{p}_x$ *zurücktransformiert.* Denn es sei etwa $\mathfrak{p}_x^*$ das $\mathfrak{p}_y$ bei der Substitution (7) entsprechende Primideal, und es sei $\Psi(x)$ eine beliebige Form eines Grades ν aus $\mathfrak{p}_x^*$; dann muß $\Psi(\psi(y)) \in \mathfrak{p}_y$ und $\Psi(\psi(\varphi(x))) \in \mathfrak{p}_x$ sein; aber wegen (8) folgt

$$\Psi(\psi(\varphi(x))) \equiv \Psi(x) \cdot M(x)^\nu \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_x),$$

also $\Psi(x) \in \mathfrak{p}_x$ und daher $\mathfrak{p}_x^* \subseteq \mathfrak{p}_x$.

Andererseits sei nun $\Psi(x)$ eine Form des Grades ν aus $\mathfrak{p}_x$, so ist $\Psi(\psi(\varphi(x))) \equiv \Psi(x) M(x)^\nu \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_x)$, folglich $\Psi(\psi(y)) \in \mathfrak{p}_y$ und daher $\Psi(x) \in \mathfrak{p}_x^*$, also $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_x^*$, was mit dem obigen Ergebnis zusammen die zu beweisende Identität $\mathfrak{p}_x^* = \mathfrak{p}_x$ liefert.

Wir nennen zwei Primideale $\mathfrak{p}_x$ und $\mathfrak{p}_y$, welche durch eine birationale Transformation zusammenhängen, *„birational äquivalent"*. Dann können wir den folgenden Satz beweisen:

SATZ 3. *Zwei birational äquivalente Primideale haben isomorphe Restklassenkörper und umgekehrt sind zwei Primideale mit isomorphen Restklassenkörpern immer birational äquivalent. Insbesondere haben also birational äquivalente Primideale notwendige dieselbe Dimension.*

Unter dem *Restklassenkörper* $K(\mathfrak{p}_x)$ eines homogenen Primideals $\mathfrak{p}_x$ in $K[x]$ verstehen wir die Menge aller Quotienten $\Phi_1(x) / \Phi_2(x)$ von homogenen Formen gleichen Grades aus $K[x]$ mit $\Phi_2(x) \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_x)$, die durch die Gleichheitsrelation

$$\Phi_1(x) / \Phi_2(x) = \Psi_1(x) / \Psi_2(x) \quad \text{wenn} \quad \Phi_1(x) \Psi_2(x) - \Phi_2(x) \Psi_1(x) \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_x)$$

geordnet sind. Bedeutet $\overline{\mathfrak{p}}_x$ das zu $\mathfrak{p}_x$ gehörige inhomogene Primideal in $K[x_1, \ldots, x_n]$, das für $x_0 = 1$ resultiert ($x_0 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_x)$ vorausgesetzt!), so ist $K(\mathfrak{p}_x)$ im wesentlichen identisch mit dem Quotientenring des Restklassenringes von $\overline{\mathfrak{p}}_x$. $K(\mathfrak{p}_x)$ ist also ein Erweiterungskörper über dem Grundkörper K vom Transzendenzgrad d, wenn d wie bisher die Dimension des Ideals $\mathfrak{p}_x$ bedeutet.

Die Substitution (7) führt die Elemente des Restklassenkörpers $K(\mathfrak{p}_x)$ in Elemente des Restklassenkörpers $K(\mathfrak{p}_y)$ über, wobei, wie man leicht nachprüft, die Gleichheitsrelation und die Ringoperationen gewahrt bleiben. Diese Abbildung von $K(\mathfrak{p}_x)$ auf $K(\mathfrak{p}_y)$ ist *umkehrbar eindeutig*; werden nämlich zwei Elemente, etwa $R_1(x)$ und $R_2(x)$ auf dasselbe

Elemente $R_1(\psi) = R_2(\psi)$ von $K(\mathfrak{p}_y)$ abgebildet, so folgt nach Ausübung von (3) mit Rücksicht auf (8) $R_1(\psi(\varphi)) = R_2(\psi(\varphi))$, also $R_1(x) = R_2(x)$ in $K(\mathfrak{p}_x)$.

Diese Abbildung ist also eine Isomorphie, wenn wir noch zeigen, daß jedes Element von $K(\mathfrak{p}_y)$ Bild eines Elementes aus $K(\mathfrak{p}_x)$ ist; das folgt aber unmittelbar aus der zu (8) parallelen Gleichung

$$\varphi_i(\psi(y)) \equiv y_i N(y) \ (\mathfrak{p}_y), \quad N(y) \not\equiv 0(\mathfrak{p}_y), \quad i = 0, 1, \ldots, m. \tag{8'}$$

Z. B. wird $\varphi_i(x) / \varphi_0(x)$ auf y_i/y_0 abgebildet.

Aus (8) folgt zunächst durch Einsetzen in $\varphi_i(x)$ ($\mu =$ Grad der Formen $\varphi_i(x)$):

$$\varphi_i(\psi(\varphi)) \equiv \varphi_i(xM) \equiv \varphi_i(x) M(x)^\mu \quad (\mathfrak{p}_x), \qquad i = 0, 1, \ldots, m,$$

woraus man

$$\varphi_i(\psi) y_k - \varphi_k(\psi) y_i \equiv 0 \quad (\mathfrak{p}_y), \qquad i, k = 0, 1, \ldots, m$$

und daraus (8') erschließt. Ferner folgt noch

$$N(\varphi) \equiv M(x)^\mu \qquad (\mathfrak{p}_x), \tag{9}$$

$$M(\psi) \equiv N(y)^{\bar{\mu}} \qquad (\mathfrak{p}_y), \tag{9'}$$

wo $\bar{\mu}$ den Grad der Formen $\psi_i(y)$ bedeutet. Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Die Bedeutung der in (8) auftretenden Form $M(x)$ ist aus folgendem Satz ersichtlich:

SATZ 4. *In einem Punkt P der $AM(\mathfrak{p}_x)$, in dem $M(x) \neq 0$ ist, ist die birationale Transformation* (3) *und ihre inverse* (7) *eindeutig analytisch. Die eventuellen Ausnahmspunkte einer birationalen Transformation, in denen sie aufhört, umkehrbar eindeutig und analytisch zu sein, werden von der Hyperfläche $M(x) = 0$ ausgeschnitten.*

Es sei nämlich der Punkt P mit den homogenen Koordinaten $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ein Punkt der $AM(\mathfrak{p}_x)$ (d. i. der algebraischen Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{p}_x$), für den $M(\xi) \neq 0$ gilt; der ihm entsprechende Punkt P' auf der $AM(\mathfrak{p}_y)$ hat die homogenen Koordinaten $\{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m\}$ mit

$$\eta_i = \varphi_i(\xi), \qquad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Es können nicht alle $\varphi_i(\xi) = 0$ sein, denn andernfalls würde aus den Kongruenzen (8), die in Gleichungen übergehen, wenn man für die Variablen x die Koordinaten einer Nullstelle von $\mathfrak{p}_x$ einsetzt, folgen

$$\xi_j M(\xi) = \psi_j(\varphi(\xi)) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

also wegen $M(\xi) \neq 0$: $\xi_0 = \xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$, was nicht sein kann.

Aus (9) folgt ferner $N(\eta) = M(\xi)^{\mu} \neq 0$, d. h. der Punkt P' gehört auch nicht zu den von $N(y) = 0$ ausgeschnittenen Ausnahmspunkten der inversen Transformation. Diese transformiert P' wieder in den ursprünglichen Punkt P zurück, wie die aus (8) folgenden Gleichungen

$$\psi_j(\eta) = \psi_j(\varphi(\xi)) = \xi_j M(\xi), \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

zeigen; der von 0 verschiedene Proportionalitätsfaktor $M(\xi)$ macht ja bei den homogenen Koordinaten $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ nichts aus.

Da dasselbe für alle Punkte einer gewissen Umgebung von P gilt, können wir sagen, daß die betrachtete birationale Transformation den Punkt P und seine Umgebung umkehrbar eindeutig auf den Punkt P' und dessen Umgebung abbildet, und zwar ist die Abbildung, da sie durch rationale Funktionen bewirkt wird, stetig und sogar analytisch.

Diese Tatsache legt geometrisch die Überlegung nahe, daß die beiden Punkte P und P' auf ihren respektiven Mannigfaltigkeiten dasselbe reguläre oder singuläre Verhalten zeigen müssen, daß *insbesondere der Punkt P' immer dann ein einfacher Punkt der $AM(\mathfrak{p}_y)$ ist, wenn P ein einfacher Punkt von $AM(\mathfrak{p}_x)$ ist.*

Um diesen Satz idealtheoretisch beweisen zu können, benützen wir die folgende Definition eines „einfachen" Punktes, beziehungsweise einer „einfachen" Untermannigfaltigkeit: *Ein Primideal $\mathfrak{p}_2$ des Ranges $r+\varrho$ ist ein „einfaches" Primoberideal eines Primideals $\mathfrak{p}_1$ des Ranges r (d. h. $AM(\mathfrak{p}_2)$ ist eine „einfache" Untermannigfaltigkeit von $AM(\mathfrak{p}_1)$), wenn es genau ϱ Formen $p_1, p_2, \ldots, p_\varrho$ in $K[x]$ gibt, derart, daß das Ideal $(\mathfrak{p}_1, p_1, \ldots, p_\varrho)$ genau die isolierte Primärkomponente $\mathfrak{p}_2$ besitzt.*

In unserem Falle können wir, indem wir eine passende homogene lineare Transformation für $\mathfrak{p}_x$ und $\mathfrak{p}_y$ vorausschicken, der einfacheren Schreibweise wegen voraussetzen, daß der Punkt P die homogenen Koordinaten $\{1, 0, \ldots, 0\}$ und auch P' die homogenen Koordinaten $\{1, 0, \ldots, 0\}$ habe. Wenn nun unserer Voraussetzung entsprechend der Punkt P einfach für $\mathfrak{p}_x$ ist (dessen Dimension d sei), so gibt es d Formen, etwa die linearen $x_1, x_2, \ldots, x_d$, derart, daß das Ideal

$$\mathfrak{a}_x = (\mathfrak{p}_x, x_1, \ldots, x_d)$$

die isolierte 0-dimensionale Komponente $\mathfrak{P}_x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ besitzt; d. h. ist $\Phi(x)$ irgendeine Form, die in P verschwindet ($\Phi(x) \in \mathfrak{P}_x$), so ist entweder bereits $\Phi(x) \in \mathfrak{a}_x$ oder es gibt eine in P *nicht* verschwindende Form $\Psi(x)$, so daß $\Psi(x)\Phi(x) \in \mathfrak{a}_x$ ist.

Wir betrachten nun das Ideal

$$\mathfrak{a}_y = (\mathfrak{p}_y, \psi_1(y), \ldots, \psi_s(y)),$$

(von dem nicht behauptet werden soll, daß es das transformierte zu $\mathfrak{a}_x$ sei) und wollen nachweisen, daß es die isolierte Primärkomponente $\mathfrak{P}_y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ besitzt; das bedeutet dann die zu beweisende Tatsache, daß der Punkt P' einfach in AM $(\mathfrak{p}_y)$ liegt.

Es sei $\Phi(y)$ irgendeine Form aus $\mathfrak{P}_y$; dann liegt $\Phi(\varphi(x))$ in $\mathfrak{P}_x$ und es gibt nach Voraussetzung eine Form $\Psi(x) \not\equiv 0\ (\mathfrak{P}_x)$, so daß $\Psi(x)\,\Phi(\varphi(x)) \in \mathfrak{a}_x$. Daraus folgert man leicht $\Psi(\psi(y))\,\Phi(\varphi(\psi(y))) \in \mathfrak{a}_y$, also, wenn ν der Grad von $\Phi(y)$ ist,

$$[\Psi(\psi(y)) \cdot N(y)^\nu]\,\Phi(y) \in \mathfrak{a}_y, \quad \text{mit} \quad \Psi(\psi(y)) \cdot N(y)^\nu \not\equiv 0\ (\mathfrak{P}_y),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Es kann nun vorkommen, daß zur selben rationalen Transformation (3) eines Primideals $\mathfrak{p}_x$ in ein Primideal $\mathfrak{p}_y$ zwei oder mehr inverse Transformationen existieren:

$$x_j \to \psi_{1j}(y),\ x_j \to \psi_{2j}(y), \ldots, x_j \to \psi_{sj}(y), \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{10}$$

die voneinander unabhängig sind, d. h. keiner linearen Beziehung der Art

$$\psi_{sj}(y) = \Psi_1(y)\,\psi_{1j}(y) + \ldots + \Psi_{s-1}(y)\,\psi_{s-1,j}(y), \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

genügen. Den Kongruenzen (8) entsprechen hier die Kongruenzen

$$\psi_{\sigma j}(\varphi(x)) \equiv x_j\, M_\sigma(x)\ (\mathfrak{p}_x),\ M_\sigma(x) \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_x), \qquad \begin{matrix} j = 0, 1, \ldots, n, \\ \sigma = 1, 2, \ldots, s, \end{matrix} \tag{11}$$

aus denen die Formen $M_1(x), \ldots, M_s(x)$ hervorscheinen, die in jedem Ausnahmspunkt der birationalen Transformation verschwinden müssen; die Ausnahmspunkte sind daher in diesem Falle Nullstellen des Ideals

$$\mathfrak{m}_x = (M_1(x),\ M_2(x), \ldots, M_s(x)), \tag{12}$$

denn in jedem anderen Punkt gibt es mindestens ein nicht verschwindendes $M_\sigma(x)$, so daß die birationale Abbildung dort regulär ist.

Es ist bemerkenswert, daß man aus den inversen Transformationen (10) beliebig viele weitere inverse Transformationen in der Art

$$x_j \to \psi_j(y) = \Psi_1(y)\,\psi_{1j}(y) + \Psi_2(y)\,\psi_{2j}(y) + \ldots + \Psi_s(y)\,\psi_{sj}(y)$$

mit irgendwelchen passenden Formen $\Psi_\sigma(y)$ ableiten kann, die nur der Gradbedingung genügen müssen, daß $\psi_j(y)$ homogen herauskomme; die zugehörige Form $M(x)$ ist:

$$M(x) = \Psi_1(\varphi(x))\,M_1(x) + \ldots + \Psi_s(\varphi(x))\,M_s(x).$$

In ähnlicher Weise kann es vorkommen, daß auch die Substitution (3), welche $\mathfrak{p}_x$ in $\mathfrak{p}_y$ transformiert, durch eine andere gleichwertige ersetzt werden kann, doch wollen wir diese Möglichkeit hier nicht mehr weiter verfolgen.

III. Veronesesche Transformationen.

Eine wichtige Gattung von birationalen Transformationen sind die Veroneseschen Transformationen; sie sind zugleich ein gutes Beispiel für die obigen allgemeinen Ausführungen. Man erhält die *Veronesesche Transformation des Grades* μ ($\mu \geqq 2$) für $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, wenn man sämtliche Potenzprodukte $x_0^{i_0} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ des Grades μ bildet und mit diesen die Substitutionsgleichungen (3) ansetzt. Da es $\binom{n+\mu}{n}$ verschiedene Potenzprodukte des Grades μ in $n+1$ homogenen Variablen gibt, müssen wir den H-Ring $K[y]$ mit eben so vielen homogenen Variablen bilden; es empfiehlt sich aber, diese Variablen nicht linear zu numerieren, sondern mit Indizes zu versehen, welche den Exponenten des Potenzproduktes entsprechen, so daß die Substitutionsformeln so ausschauen:

$$y_{i_0 i_1 \cdots i_n} \to x_0^{i_0} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}, \qquad i_0 + i_1 + \ldots + i_n = \mu. \tag{13}$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Transformation für jedes Primideal in $K[x]$, insbesondere auch für das Nullideal *birational* umkehrbar, und zwar *ohne Ausnahmspunkte* eindeutig umkehrbar ist. Die inversen Transformationen zu (13) lassen sich nämlich leicht angeben: ist nämlich

$$M(x) = x_0^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}, \qquad k_0 + k_1 + \ldots + k_n = \mu - 1,$$

als Potenzprodukt vom Grade $\mu - 1$ beliebig gewählt, so ist

$$x_j \to y_{k_0 k_1 \ldots (k_j+1) \ldots k_n}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n \tag{14}$$

eine inverse Transformation, denn man bestätigt leicht die Identitäten (vgl. (8)):

$$\psi_j(\varphi(x)) = x_j M(x), \quad \text{mit} \quad M(x) \neq 0.$$

Da hier $M(x)$ alle Potenzprodukte des Grades $\mu-1$ durchläuft, gilt

$$\mathfrak{m}_x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^{\mu-1};$$

das ist aber ein T-Ideal, das keine Nullstelle (im projektiven Raum) besitzt. Daher ist jede Veronesesche Transformation im gesamten projektiven Raum R_n ohne Ausnahmspunkte umkehrbar eindeutig und stetig. Sie transformiert das Nullideal (0) des H-Ringes $K[x]$ in das *Veronesesche Ideal* $\mathfrak{v}_n^{(\mu)}$ in $K[y]$, und jedes andere Primideal $\mathfrak{p}_x$ aus

$K[x]$ birational in ein Primideal $\mathfrak{p}_y$, das Oberideal von $\mathfrak{v}_n^{(\mu)}$ ist. Das bedeutet geometrisch: Irgendeine algebraische Mannigfaltigkeit des projektiven Raumes R_n wird durch die Veronesesche Transformation (13) birational ohne Ausnahmspunkte auf eine algebraische Mannigfaltigkeit des Raumes R_m $(m = \binom{n+\mu}{n} - 1)$ abgebildet, die auf der Veroneseschen Mannigfaltigkeit AM $(\mathfrak{v}_n^{(\mu)})$ liegt.

Bei einer Veroneseschen Transformation eines Primideals $\mathfrak{p}_x$ in ein Primideal $\mathfrak{p}_y$ gehen alle einfachen Punkte von AM $(\mathfrak{p}_x)$ in einfache Punkte von AM $(\mathfrak{p}_y)$ über, alle singulären Punkte der ersten in singuläre Punkte der zweiten Mannigfaltigkeit, so daß die Singularitäten von AM $(\mathfrak{p}_x)$ und AM $(\mathfrak{p}_y)$ sich umkehrbar eindeutig entsprechen und von derselben Art sind.

Die *Hilbert*funktion des transformierten Ideals $\mathfrak{p}_y$ läßt sich hier nach Formel (6) leicht berechnen; denn man hat $\mathfrak{u} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^\mu$, daher $H(\mu t; \mathfrak{u}^t) = 0$ und um so mehr $H(\mu t; \mathfrak{a}_x + \mathfrak{u}^t) = 0$. Also bleibt

$$H(t; \mathfrak{p}_y) = H(\mu t; \mathfrak{p}_x). \tag{15}$$

Insbesondere findet man für $\mathfrak{p}_x = (0)$, $\mathfrak{p}_y = \mathfrak{v}_n^{(\mu)}$, $H(t; (0)) = \binom{n+t}{n}$:

$$H(t; \mathfrak{v}_n^{(\mu)}) = \binom{n+\mu t}{n} = \mu^n \binom{t}{n} + \ldots \tag{16}$$

d. h. die Veronesesche Mannigfaltigkeit AM $(\mathfrak{v}_n^{(\mu)})$ hat die Dimension n und die Ordnung μ^n.

IV. Projektionen.

Eine weitere wichtige Gattung von birationalen Transformationen sind die *Projektionen*; wir erhalten sie, wenn wir den Grad μ der Formen $\varphi_i(x)$ in (3) $\mu = 1$ wählen und die Anzahl $m+1$ der Variablen y kleiner als diejenige $(n+1)$ der x. Die Formen $\varphi_i(x)$ sind dann linear, und wir wollen voraussetzen, daß sie linear unabhängig voneinander sind. Dann können wir, indem wir eine passende homogene lineare Transformation vorausschicken, annehmen, daß die Substitution die folgende Gestalt hat:

$$y_0 \to x_0, \; y_1 \to x_1, \ldots, y_{n-1} \to x_{n-1}. \tag{17}$$

Wir betrachten hier also den Fall einer einfachen Projektion mit $m = n - 1$, die bereits alle wichtigen Eigenschaften aufzeigt und auf deren mehrmalige Anwendung sich jede allgemeine Projektion zurückführen läßt.

Man überlegt leicht, daß ein H-Ideal $\mathfrak{a}_x$ durch (17) in ein H-Ideal $\mathfrak{a}_y$ transformiert wird, welches alle Formen $\Phi(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ umfaßt, die in $\mathfrak{a}_x$ enthalten sind, wenn man x anstelle von y schreibt. Das Ideal

$\mathfrak{a}_y$ ist also bis auf die Schreibweise (y statt x) identisch mit dem *Eliminationsideal*

$$\bar{\mathfrak{a}}_x = \mathfrak{a}_x \cap K[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}], \tag{18}$$

das als H-Ideal des Ringes $K[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$ aufzufassen ist.

Die zu $\bar{\mathfrak{a}}_x$ gehörige algebraische Mannigfaltigkeit AM ($\bar{\mathfrak{a}}_x$) liegt in der Koordinatenhyperebene $x_n = 0$ des R_n und ist die Projektion der AM ($\mathfrak{a}_x$) von dem Punkte $\{0, \ldots, 0, 1\}$ aus.

Damit die Projektion (17) für ein Primideal $\mathfrak{p}_x$ *birational* sei, muß noch die Bedingung erfüllt sein, daß es eine inverse Transformation gibt:

$$x_0 \to \psi_0(y), \quad x_1 \to \psi_1(y), \ldots, x_n \to \psi_n(y), \quad \psi_i(y) \in K[y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]$$

welche entsprechend (8) die Kongruenzen erfüllen:

$$\psi_j(x) \equiv x_j \psi(x) \quad (\mathfrak{p}_x), \qquad \psi(x) \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{p}_x), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Insbesondere muß die Kongruenz für $j = n$ erfüllt sein, und das liefert den Satz:

SATZ 5. *Das Eliminationsideal*

$$\bar{\mathfrak{p}}_x = \mathfrak{p}_x \cap K[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$$

ist dann und nur dann birational äquivalent zu $\mathfrak{p}_x$, wenn $\mathfrak{p}_x$ mindestens eine in x_n lineare Form

$$\chi(x) + x_n \psi(x), \qquad \chi(x), \ \psi(x) \in K[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$$

mit $\psi(x) \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}_x)$ enthält.

Die angegebene Bedingung ist in der Tat nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, denn ist $\chi(x) + x_n \psi(x)$ eine Form der bezeichneten Art in $\mathfrak{p}_x$, so ist die Transformation

$$x_j \to y_j \psi(y), \quad x_n \to -\chi(y), \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

zu (17) invers, weil die Kongruenzen (8) mit $M(x) = \psi(x) \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}_x)$ erfüllt sind.

Wenn mehrere voneinander unabhängige Formen der bezeichneten Art in $\mathfrak{p}_x$ enthalten sind, so gibt es auch mehrere zu (17) inverse Transformationen. Die Ausnahmspunkte der Projektion, in denen sie nicht eindeutig umkehrbar ist, sind die Nullstellen des Ideals

$$\mathfrak{m}_x = (\mathfrak{p}_x, \ldots, \psi(x), \ldots),$$

das von allen Funktionen $\psi(x)$ erzeugt wird.

Die *Hilbertfunktion* des durch (17) aus $\mathfrak{a}_x$ transformierten Ideals $\mathfrak{a}_y$ kann nach der allgemeinen Formel (6) berechnet werden; man kann sie

in diesem speziellen Fall noch weiter auswerten und erhält mit leichten Überlegungen dieselbe Formel, die ich für das Eliminationsideal bereits früher abgeleitet habe[9]. Man ordnet zu diesem Zwecke die Formen des Ideals $\mathfrak{a}_x$ nach Potenzen von x_n und betrachtet zunächst die Menge aller dieser Formen, die x_n überhaupt nicht enthalten; sie bilden ein H-Ideal $\mathfrak{a}_0$ des H-Ringes $K[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$, das offenbar mit dem Eliminationsideal $\bar{\mathfrak{a}}_x$ identisch ist.

Darauf betrachtet man alle Formen $\psi_0(x) + x_n \psi_1(x)$ in $\mathfrak{a}_x$, welche in x_n genau den Grad 1 erreichen; die Menge aller Formen $\psi_1(x)$ bildet wieder ein H-Ideal $\mathfrak{a}_1$ des H-Ringes $K[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$, das $\mathfrak{a}_0$ umfaßt. Hierauf alle Formen $\psi_0(x) + x_n \psi_1(x) + x_n^2 \psi_2(x)$, die in x_n den Grad 2 erreichen: die Menge aller Formen $\psi_2(x)$ bildet ein H-Ideal $\mathfrak{a}_2$, das $\mathfrak{a}_1$ umfaßt usw. Man erhält auf diese Weise eine Idealkette

$$\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \ldots$$

von H-Idealen in $K[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$, deren erstes das Eliminationsideal $\mathfrak{a}_0 = \bar{\mathfrak{a}}_x$ ist, das bis auf die Bezeichnung mit dem „projizierten" Ideal $\mathfrak{a}_y$ übereinstimmt.

Da unser H-Ring ein *Noetherscher* Ring ist, in dem der Teilerkettensatz gilt, so muß in der obigen Kette von einem bestimmten Glied, etwa von $\mathfrak{a}_\tau$ ab das Gleichheitszeichen gelten:

$$\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \ldots \subset \mathfrak{a}_\tau = \mathfrak{a}_{\tau+1} = \ldots$$

Nun führt eine leichte Überlegung zur Formel

$$H(t; \mathfrak{a}_x) = \sum_{\sigma=0}^{\prime} H(t-\sigma; \mathfrak{a}_\sigma), \tag{19}$$

wo die Summe rechts über die *Hilbert*funktionen der eben definierten Ideale $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ zu erstrecken ist[10]. Wenn man noch $H(t; \mathfrak{a}_0) = H(t; \mathfrak{a}_y)$ beachtet, so folgt die endgültige Formel:

$$H(t; \mathfrak{a}_y) = H(t; \mathfrak{a}_x) - \sum_{\sigma=1}^{\prime} H(t-\sigma; \mathfrak{a}_\sigma). \tag{19'}$$

Unter einer *regulären Projektion* eines Primideals $\mathfrak{p}_x$ verstehen wir eine solche, die keine Ausnahmspunkte besitzt und also überall ohne Ausnahme eindeutig umkehrbar ist. *Bei einer regulären Projektion ist*

---

[9] Vgl. MAG, S. 171f.

[10] Es ist klar, daß $H(t; \mathfrak{a}_x)$ die *Hilbert*funktion des Ideals $\mathfrak{a}_x$ in $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ bedeutet, während in der Summe rechts die *Hilbert*funktionen der Ideale $\mathfrak{a}_\sigma$ in $K[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$ gemeint sind.

das Ideal $\mathfrak{p}_1$ *der oben definierten Idealkette ein T-Ideal*[11] *des H-Ringes* $K[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$ *und* $\mathfrak{p}_\tau$ *das Einheitsideal.*

Die Behauptung hinsichtlich $\mathfrak{p}_1$ ist nach dem Vorausgehenden klar, weil die Nullstellen von $\mathfrak{p}_1$ die Ausnahmspunkte der Projektion sind, dagegen ist die Behauptung bezüglich $\mathfrak{p}_\tau$ noch zu beweisen, denn wir können unmittelbar nur schließen, daß $\mathfrak{p}_\tau$ ein $\mathfrak{p}_1$ umfassendes Ideal sein muß. Es ist also noch die Möglichkeit, daß $\mathfrak{p}_\tau$ ein zu $t = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ gehörendes Primärideal sei, auszuschließen.

Wäre nämlich $\mathfrak{p}_\tau$ nicht das Einheitsideal, so wäre $\{0, 0, \ldots, 0, 1\}$ eine Nullstelle des Primideals $\mathfrak{p}_x$ und wir könnten, indem wir $x_n = 1$ setzen, zum entsprechenden inhomogenen Primideal $\mathfrak{p}$ im P-Ring $\mathfrak{o} = K[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$, und von dort zum Erweiterungsideal $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}\tilde{\mathfrak{o}}$ im Potenzreihenring $\tilde{\mathfrak{o}} = K\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ übergehen.

Da $\mathfrak{p}_\tau$ ein zu t gehörendes Primärideal sein soll, gibt es Exponenten ν_i derart, daß $x_i^{\nu_i} \in \mathfrak{p}_\tau$ ist $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$; dementsprechend gibt es in $\mathfrak{p}$ und in $\tilde{\mathfrak{p}}$ Polynome der Gestalt

$$p_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) = x_i^{\nu_i} + \ldots (+\text{Glieder höheren Grades}), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Daraus schließt man nun, daß jedes Potenzprodukt $x_0^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_{n-1}^{k_{n-1}}$ eines Grades $k_0 + k_1 + \ldots + k_{n-1} \geqq \nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_{n-1} - n + 1$ in $\tilde{\mathfrak{p}}$, und nach dem *Noetherschen* Satz[12] auch in $\mathfrak{p}$ enthalten ist. Daher gibt es mod $\mathfrak{p}$ nur endlich viele linear unabhängige Polynome, woraus wieder folgt, daß $\mathfrak{p}$ und gleichzeitig damit auch das zugehörige homogene $\mathfrak{p}_x$ die Dimension 0 haben muß.

Dieser letzte Fall führt auf $\mathfrak{p}_x = \bar{\mathfrak{p}}_x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ und kann hier als uninteressant außer Acht gelassen werden. Für jedes mindestens eindimensionale Primideal $\mathfrak{p}_x$ aber ist unsere Behauptung damit bewiesen.

SATZ 6. *Ist* $\mathfrak{p}_y$ *eine reguläre Projektion eines Primideals* $\mathfrak{p}_x$ *(einer Dimension* $\geqq 1$*), so sind die Hilbertfunktionen der beiden Ideale für genügend große* t *einander gleich*:

---

[11] T-Ideal ist ein zu $t = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ gehörendes Primärideal (vgl. MAG., S. 54, 158), das als solches keine Nullstelle im projektiven R_{n-1} besitzt. Es könnte $\mathfrak{p}_1$ auch das Einheitsideal sein; das würde bedeuten, daß eine Linearform $a_0 x_0 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + x_n$ in $\mathfrak{p}_x$ enthalten wäre, so daß die AM $(\mathfrak{p}_x)$ in dem durch diese ausgeschnittenen linearen R_{n-1} und nicht eigentlich im R_n läge. Dieser Fall ist oben mit eingeschlossen, aber in diesem Zusammenhang nicht besonders interessant, weil wir vor allem die Projektionen von solchen Mannigfaltigkeiten, die eigentlich in einen höher dimensionalen Raum liegen. auf einem Raum geringerer Dimension studieren wollen.

[12] Vgl. MAG, S. 149.

$$H(t; \mathfrak{p}_y) = H(t; \mathfrak{p}_x) \text{ für } t \geqq T.$$

Nach Formel (19′) hat man nämlich

$$H(t; \mathfrak{p}_y) = H(t; \mathfrak{p}_x) - \sum_{\sigma=1}^{t} H(t-\sigma; \mathfrak{p}_\sigma);$$

nun ist aber $\mathfrak{p}_\tau = \mathfrak{p}_{\tau+1} = \ldots = (1)$ und $H(t; (1)) = 0$, also braucht die Summe nur bis $\tau-1$ erstreckt zu werden:

$$H(t; \mathfrak{p}_y) = H(t; \mathfrak{p}_x) - \sum_{\sigma=1}^{\tau-1} H(t-\sigma; \mathfrak{p}_\sigma).$$

Alle Ideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{\tau-1}$ sind T-Ideale, deren *Hilbert*funktionen für genügend große t verschwinden[13]. Man kann daher eine passende Schranke T bestimmen, so daß alle Glieder der Summe rechts für $t \geqq T$ verschwinden; das liefert die zu beweisende Formel.

Die Wichtigkeit der Projektionen ersieht man aus folgendem Satz:

SATZ 7. *Jede birationale Transformation kann aus einer Veroneseschen Transformation, einer projektiven Transformation und aus Projektionen zusammengesetzt werden.*

Es sei nämlich

$$y_i \to \varphi_i(x), \qquad i = 0, 1, \ldots, \ldots, m$$

irgendeine rationale Transformation, wo die Formen $\varphi_i(x)$ den Grad μ haben mögen; ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir auch voraussetzen, daß sie linear unabhängig seien. Dann erhalten wir genau dieselbe Transformation, wenn wir zunächst die Veronesesche Transformation des Grades μ ausführen, dann eine lineare homogene Transformation der neuen Variablen derart, daß die ersten $m+1$ eben die Formen $\varphi_i(x)$ werden, und schließlich die übrigen Variablen eliminieren.

Die Untersuchung der birationalen Transformationen einer algebraischen Mannigfaltigkeit ist damit im wesentlichen auf die Untersuchung der *Veroneseschen Transformationen* und der *Projektionen* zurückgeführt. Nun hat man über die Wirkungen von Veroneseschen Transformationen schon eine ziemlich gute Übersicht; denn sie sind durchaus umkehrbar eindeutig und ändern nichts an den Singularitäten der Mannigfaltigkeit. Auch die *Hilbert*funktion ist nach Formel (15) für das transformierte Ideal sofort anzugeben.

---

[13] Vgl. MAG, S. 158.

Dagegen ist die Untersuchung der Projektionen noch lange nicht abgeschlossen. Für reguläre Projektionen, die ohne Ausnahme umkehrbar eindeutig sind, haben wir zwar soeben ein ziemlich erschöpfendes Resultat abgeleitet. Aber für die weitere Theorie der birationalen Transformationen kommt es gerade auf die nicht regulären Projektionen an, die nicht durchaus umkehrbar eindeutig sind; denn bei solchen Projektionen können neue Singularitäten dazukommen und alte Singularitäten (nämlich wenn das Projektionszentrum in sie hinein verlegt wird) zum Verschwinden gebracht werden. Darauf soll in einer späteren Arbeit näher eingegangen werden.

V. Birationale Invarianten.

Im Vordergrunde der algebraischen Geometrie steht die Frage nach den *birationalen Invarianten*, das sind Eigenschaften und Größenbeziehungen, die bei birationalen Transformationen sich nicht ändern und also für birational äquivalente H-Ideale (und deren algebraische Mannigfaltigkeiten) dieselben sind. Das Ziel der Forschung ist hier, jede birationale Äquivalenzklasse durch Angabe einer (möglichst kleinen) Anzahl von birationalen Invarianten erschöpfend zu charakterisieren. Von diesem Ziel ist man allerdings, wenigstens bei Gebilden höherer Dimension, noch ziemlich weit entfernt.

Hier soll diese Frage nur in Hinsicht auf diejenigen Invarianten angeschnitten werden, welche mit der *Hilbertfunktion* in Zusammenhang stehen. Wir nennen diese Invarianten, welche sich aus der *Hilbert*funktion ableiten lassen, *arithmetische Invarianten*.

Die für Veronesesche Transformationen gültige Formel (15)

$$H(t; \mathfrak{p}_y) = H(\mu t; \mathfrak{p}_x)$$

zeigt, daß die folgenden Ausdrücke invariant gegenüber Veroneseschen Transformationen sind:

$$g_0, \frac{g_1^2}{g_2}, \frac{g_1 g_2}{g_3}, \ldots, \frac{g_1 g_{d-1}}{g_d},$$

wo $g_0, g_1, \ldots, g_d$ die Koeffizienten der *Hilbert*funktion in der Schreibweise (5″) bedeuten. Da ferner die *Hilbert*funktion gegenüber projektiven Transformationen und regulären Projektionen als ganze invariant ist, folgt:

SATZ 8: *Die aus der Hilbertfunktion* (5″) *abgeleiteten Größen*

$$g_0, \frac{g_1^2}{g_2}, \frac{g_1 g_2}{g_3}, \ldots, \frac{g_1 g_{d-1}}{g_d} \tag{20}$$

sind invariant gegenüber allen „regulären" birationalen Transformationen (das sind solche, die ohne Ausnahme umkehrbar eindeutig sind).

Diese Transformationen sind nämlich, wie man zeigen kann, darstellbar durch eine Veronesesche Transformation, eine projektive Transformation und eine oder mehrere reguläre Projektionen.

Von diesen Invarianten ist bisher nur die erste bekannt geworden durch *Severi*[14], der sie in der Gestalt

$$G(\mathfrak{p}_x) = (-1)^d (g_0 - 1)$$

als *„virtuelles arithmetisches Geschlecht"* eingeführt und sehr eingehend untersucht hat.

Die Größen (20) sind allerdings noch keine absoluten Invarianten, d. h. sie sind nicht invariant gegenüber allgemeinen birationalen Transformationen. Ob sich aus ihnen absolute Invarianten ableiten lassen, bedarf noch weitergehender Untersuchungen. Aber es liegt die Vermutung nahe, daß dies tatsächlich möglich ist, denn bei den Kurven ($d = 1$) läßt sich bekanntlich das oben angegebene virtuelle arithmetische Geschlecht $G(\mathfrak{p}_x)$ zu einer absoluten birationalen Invariante, nämlich dem *Geschlecht* der Kurve vervollkommen, indem man einfach eine der Anzahl der Doppelpunkte entsprechende Zahl abzieht. Es ist wahrscheinlich, daß auch bei höheren Dimensionen derartige, von den Singularitäten der Mannigfaltigkeit abhängende Korrekturen an den Größen (20) diese in absolute Invarianten überführen.

Diese Untersuchung steht auch in engem Zusammenhang mit dem Problem der Auflösung der Singularitäten, das noch kurz behandelt werden soll.

VI. Auflösung der Singularitäten einer algebraischen Mannigfaltigkeit.

Es dürfte von Interesse sein, eine birationale Transformation anzugeben, welche in allen Punkten des Raumes R_n umkehrbar eindeutig ist, mit Ausnahme von gewissen vorgegebenen Punkten, welche die Nullstellen eines Ideals $\mathfrak{a}_x = (a_0, a_1, \ldots, a_s)$ seien. Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß alle Basisformen

[14] *F. Severi*, Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche. Rend. Circolo mat. Palermo, 28 (1909), 33—87. Vgl. auch die zweite Arbeit unter demselben Titel in Annali di Mat. pura appl. (IV) 32 (1951), 1—81.

$a_0, a_1, \ldots, a_s$ denselben Grad μ—1 aufweisen. Dann setzen wir die folgende Transformation an:[15]

$$y_{ik} \to x_i\, a_k(x), \qquad \begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, n, \\ k = 0, 1, \ldots, s. \end{matrix} \tag{21}$$

Durch diese Transformation wird das Nullideal des H-Ringes $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ in ein Primideal $\mathfrak{v}_y$ des H-Ringes $K[y_{00}, y_{01}, \ldots, y_{ik}, \ldots]$ transformiert, dessen Nullstellengebilde eine algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension n in einem Raum R_{ns+n+s} der homogenen Koordinaten y_{ik} ist. Dieses Ideal $\mathfrak{v}_y$ wird durch folgende Basis erzeugt:

$$\mathfrak{v}_y = (\ldots, y_{ik}\, y_{lm} - y_{im}\, y_{lk}, \ldots, y_{ij}\, a_k(y_{lm}) - y_{ik}\, a_j(y_{lm}), \ldots).$$

Die Transformation (21) ist für das Nullideal und daher für jedes Primideal in $K[x]$ birational, weil $s+1$ inverse Transformationen sofort angegeben werden können:

$$x_0 \to y_{0k},\ x_1 \to y_{1k}, \ldots, x_n \to y_{nk}, \qquad k = 0, 1, \ldots, s. \tag{22}$$

Ausnahmspunkte sind die Nullstellen des Ideals

$$\mathfrak{m}_x = (a_0(x), a_1(x), \ldots, a_s(x)) = \mathfrak{a}_x;$$

die Transformation (21) ist also umkehrbar eindeutig in jedem Punkt des Raums R_n, der nicht Nullstelle von $\mathfrak{a}_x$ ist, d. h. der *nicht* der vorgegebenen Punktmenge angehört.

Andererseits findet man $N_k(y) = a_k(y_{lk})$ und daher sind die Ausnahmspunkte der inversen Transformation (22) auf $AM(\mathfrak{v}_y)$ die Nullstellen des Ideals:

$$\mathfrak{m}_y = (\mathfrak{v}_y, a_0(y_{l0}), \ldots, a_s(y_{ls})).$$

Den Punkten des Raumes R_n, die Nullstellen von $\mathfrak{a}_x = \mathfrak{m}_x$ sind, entsprechen keine Punkte auf der $AM(\mathfrak{v}_y)$, weil dafür alle homogenen Koordinaten y_{ik} verschwinden. Aber man kann sagen, daß *ihre unendlich benachbarten Punkte auf die Punkte von* $AM(\mathfrak{m}_y)$ *abgebildet werden*[16].

Das ist so zu verstehen: es seien $\{\xi\} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ die Koordinaten irgendeiner Nullstelle von $\mathfrak{a}_x$, $\{\zeta\} = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ diejenigen eines beliebigen Punktes von R_n. Dann ist der Punkt mit den Koordinaten $\{\xi + \varepsilon\,\zeta\} = \{\xi_0 + \varepsilon\,\zeta_0, \xi_1 + \varepsilon\,\zeta_1, \ldots, \xi_n + \varepsilon\,\zeta_n\}$ ein Nachbarpunkt von $\{\xi\}$, der für $\varepsilon \to 0$ in diesen hineinrückt, und zwar in einer

[15] Wenn die Formen $x_i\, a_k(x)$ nicht linear unabhängig sind, so wird man zweckmäßig eine oder mehrere Variable y_{ik} streichen. Für die formalen Rechnungen aber ist das nicht notwendig.

[16] Hier setzen wir voraus, daß der Grundkörper K der komplexe Zahlkörper ist.

bestimmten Richtung. Wir setzen voraus, daß $\{\zeta\}$ so gewählt ist, daß der Punkt $\{\xi + \varepsilon\,\zeta\}$ in einem gewissen Intervall $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ nicht Nullstelle von $\mathfrak{a}_x$ ist. Dann ist die Transformation (21) eindeutig umkehrbar und man erhält als Koordinaten des Bildpunktes (bei Vernachlässigung höherer Potenzen von ε):

$$\eta_{ik} = (\xi_i + \varepsilon\,\zeta_i)\,a_k(\xi + \varepsilon\,\zeta) = \varepsilon\,\xi_i \sum \zeta_j\,a_{kj}'(\xi).$$

In diesen Koordinaten darf der gemeinsame Proportionalitätsfaktor ε weggelassen werden.

Man bestätigt leicht, daß dies eine Nullstelle von $\mathfrak{m}_y$ ist, die nicht nur vom $\{\xi\}$, sondern auch von $\{\zeta\}$, d. h. von der *Richtung* abhängt, in der sich der Punkt $\{\xi + \varepsilon\,\zeta\}$ dem Punkte $\{\xi\}$ nähert.

Wenn eine Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p}_x)$ 2 oder mehrere Male durch die betrachtete Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{a}_x)$ hindurchgeht, also diese letztere als „singuläre" Untermannigfaltigkeit aufweist, so wird durch die Transformation (21) diese Singularität „aufgelöst", denn ihre Punkte verschwinden (d. h. haben keine Bildpunkte) und zwei benachbarte Punkte, die in verschiedenen Richtungen liegen, werden im allgemeinen auf getrennte Bildpunkte abgebildet.

Die Bildmannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{p}_y)$ wird also die bezeichnete Singularität nicht mehr aufweisen und auch sonst keine neuen Singularitäten hinzugewonnen haben, weil die Abbildung in allen außerhalb der $AM(\mathfrak{a}_x)$ gelegenen Punkten umkehrbar eindeutig und stetig ist. Aber es ist doch noch nicht sicher, daß $AM(\mathfrak{p}_y)$ überhaupt singularitätenfrei ist, denn sie kann immerhin noch die Mannigfaltigkeit $AM(\mathfrak{m}_y)$ oder Teile derselben als singuläre Untermannigfaltigkeiten enthalten[17]. Die Verhältnisse sind hier noch sehr unklar und auch die bis jetzt entwickelten Hilfsmittel reichen nicht aus, um das feinere Verhalten einer Mannigfaltigkeit in der Umgebung einer Singularität eindeutig charakterisieren und die Umwandlung dieser Feinheiten bei einer Transformation (21) verfolgen zu können.

[17] Vgl. *Beniamino Segre*, Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche. Ann. Mat. pura appl. Serie IV, 33 (1952), 5—48.

Zur Theorie der Überdeckung durch konvexe Körper.

Von

Edmund Hlawka, Wien.

(Eingelangt am 25. August 1954.)

Es sei im euklidischen n-dimensionalen Raum R_n ein beschränkter konvexer Körper K mit Mittelpunkt in einem Punkt o gegeben, seine Distanzfunktion sei $f(x)$. Es ist also $K: f(x) \leqq 1$. Weiters sei $\mathfrak{G}$ ein n-dimensionales Vektorgitter, Γ das Punktgitter mit Vektorgitter $\mathfrak{G}$, welches o enthält. Die Determinante von $\mathfrak{G}$ bzw. Γ bezeichnen wir mit $m(\mathfrak{G}) = m$. Ist p ein Punkt des R_n, dann sei $E(p) = E(p, K, \mathfrak{G}) = \min f(p')$ erstreckt über alle p', welche aus p durch eine Gittertranslation von $\mathfrak{G}$ hervorgehen. $E(K, \mathfrak{G}) = \sup_p E(p)$ nennen wir die Exzentrizität von K in Bezug auf $\mathfrak{G}$.

Es ist bekannt, daß

$$2\,E(K, \mathfrak{G}) \leqq \mu_1 + \ldots + \mu_n \leqq n\,\mu_n,$$

wo $\mu_i(K, \mathfrak{G})$ $(1 \leqq i \leqq n)$ das i-te Minimum des Punktgitters Γ in Bezug auf K ist. Daraus erhält man leicht eine Abschätzung von E durch μ_1 allein[1]

$$2\,E\,(K, \mathfrak{G}) \leqq (n-1)\,\mu_1 + 2^n\,m\,(\mathfrak{G}) \mid J\,\mu_1^{n-1}, \tag{1}$$

wo J das Volumen von K ist.

Wir wollen nun zunächst zeigen, daß eine Abschätzung der Gestalt (1) genommen werden kann, welche sogar schärfer ist, ohne daß die Theorie der sukzessiven Minima $\mu_2, \ldots, \mu_n$ benützt zu werden braucht, sondern allein der Minkowskische Fundamentalsatz verwende twird.

Satz 1: *Es ist*

$$2\,E(K, \mathfrak{G}) \leqq v^{1/n}\,\{v\}^{1-1/n}\,\mu_1 \tag{2}$$

wo $v = 2^n\,m \mid J\mu_1{}^n$ *und* $\{v\}$ *die nächst größere ganze Zahl an* v *ist.*

Eine etwas schwächere Abschätzung wurde bereits früher[1] unter Benützung des Blichfeldtschen Satzes gegeben.

---

[1] *E. Hlawka*, Math. Ann. **125** (1952) 183—207.

Beweis:[2] Da o ein ausgezeichneter Punkt ist, können wir die Punkte p durch seine Ortsvektoren $\mathfrak{p}$ von o aus festlegen. Die Punkte von Γ bezeichnen wir in dieser Schreibweise mit $\mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{p}$ ein-beliebiger Punkt des R_n, dann betrachten wir den $(n+1)$-dimensionalen Zylinder $Z(K)$

$$f(2z\mathfrak{p} \mid (l+1) - \mathfrak{x}) \leqq t, \quad |z| \leqq l+1, \tag{3}$$

wo $t = (2^n m \mid J(l+1))^{1/n} \leqq \mu_1$, $l+1 = \{v\} \geqq 1$ ist. (Nach *Minkowski* ist ja $J\mu_1^n \leqq 2^n m(\mathfrak{G})$).

Sein Volumen ist $2^{n+1} m(\mathfrak{G})$, also enthält Z nach dem Minkowskischen Fundamentalsatz sicher einen Gitterpunkt $(\mathfrak{g}_0, h) \neq (\mathfrak{o}, o)$ des $(n+1)$-dimensionalen Gitters $\mathfrak{G}'$, mit den Gitterpunkten $(\mathfrak{g}, h)$, $(\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$, h ganz) mit $m(\mathfrak{G}') = m(\mathfrak{G})$. Es gibt also ein $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ und eine ganze Zahl h, so daß gilt:

$$f(2h\mathfrak{p} \mid (l+1) - \mathfrak{g}_0) \leqq t, \quad |h| \leqq l+1, \tag{4}$$

ohne daß zugleich $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}$, $h = 0$ ist.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Der Punkt $(\mathfrak{g}, h)$ liegt im Innern von $Z(K)$, also ist

$$f(2h\mathfrak{p} \mid (l+1) - \mathfrak{g}_0) < t, \quad |h| < l+1.$$

Dann muß sogar, da l ganz ist, $|h| \leqq l$ sein. Es ist $h \neq o$. Denn wäre $h = o$, dann wäre $f(\mathfrak{g}_0) < t \leqq \mu_1$ also auch $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}$, was nicht geht. O. B. d. A. sei $h > o$, also $\geqq 1$. Wir können weiter annehmen, daß das Minimum $E(\mathfrak{p}, K, \mathfrak{G}) = E(\mathfrak{p})$ von $f(\mathfrak{p} - \mathfrak{g})$, $(\mathfrak{g} \in \mathfrak{G})$ gerade für $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}$ angenommen wird. dann ist

$$E(\mathfrak{p}) \leqq f(\mathfrak{p} - \mathfrak{g}_0) = f(\mathfrak{p} - 2h\mathfrak{p} \mid (l+1) + 2h\mathfrak{p} \mid (l+1) - \mathfrak{g}_0) \leqq E(\mathfrak{p}) \mid 1 - 2h \mid (l+1) \mid + t.$$

Nun ist $-(l-1) \leqq l+1-2h \leqq l-1$, also

$$E(\mathfrak{p}) \leqq (\mathfrak{p}) \leqq E(\mathfrak{p}) \frac{l-1}{l-1} + t, \quad \text{also} \quad E(\mathfrak{p}) \leqq \tfrac{1}{2}(l+1)t.$$

Dies ist aber gerade (2).

2. Alle $(\mathfrak{g}, h)$ liegen am Rand von $Z(K)$. Nun ist das Volumen von $Z(K)$ gerade $2^{n+1} m(\mathfrak{G}')$. Es liegt also der Grenzfall des Minkowskischen Satzes vor. Dann überdecken die Zylinder, welche aus $\frac{1}{2}(Z(K)$ durch Ausübung aller Gittertranslationen von $\mathfrak{G}'$ hervorgehen (das Figurengitter $(\frac{1}{2} Z(K), \mathfrak{G}')$, den R_{n+1} einfach und lückenlos, also auch den Punkt $(\mathfrak{o}, {}^1/_2)$. D. h. es gibt $(\mathfrak{g}_0, h)$ mit

[2] Dieser Beweis, im Sommer 1952 gefunden, wurde in einer Vorlesung über Geometrie der Zahlen, im Sommersemester 1953 vom Verf. vorgetragen.

$$f(2(h-{}^1/_2)\mathfrak{p} \mid (l+1)-\mathfrak{g}_0) \leqq {}^1/_2 t, \quad |h-{}^1/_2| \leqq {}^1/_2 (l+1). \tag{5}$$

Nun ist stets $2h-1 \neq o$, o. B. d. A. $2h-1 \geqq 1$. Dann ist, analog wie früher $E(\mathfrak{p}) \leqq f(\mathfrak{p}-\mathfrak{g}_0) \leqq |l+1-(2h-1)|\, E(\mathfrak{p})\, |(l+1)+{}^1/_2 t$.

Nun ist $o \leqq l+1-(2h-1) \leqq l$, daher $E(\mathfrak{p}) \leqq {}^1/_2 (l+1)\, t$ und damit ist (2) gezeigt. Der Charakter der Abschätzung (2) wird meines Erachtens viel klarer durch folgende Abschätzung:

Satz 2: *Es ist*

$$2\, E(K, \mathfrak{G}) \leqq w^{1/n} \{w\}^{1-1/n} \tag{6}$$

wo $w = 2^{n-1}(A+1)\, m/J$ *und* A *die (ungerade) Anzahl aller Gitterpunkte von* Γ *im Innern von* K *(o mitgerechnet), ist, also die Anzahl der* $\mathfrak{g}$ *in* $f(\mathfrak{x}) < 1$ *ist.*

Der Beweis wird ähnlich wie bei Satz 1 geführt. Man betrachtet wieder den Zylinder $Z(K)$, aber jetzt ist $t = (w \mid (l+1))^{1/n} \leqq 1$ und $l+1 = \{w\} \geqq 1$, denn nach dem verallgemeinerten Minkowskischen Satz gilt doch:

Enthält K im Innern höchstens $k-1$ verschiedene Gitterpunktpaare $\neq \mathfrak{o}$ (k ganze Zahl $\geqq o$), dann ist $J \leqq 2^n k\, m(\mathfrak{g})$ und ist $J \geqq 2^n k\, m(\mathfrak{g})$, dann enthält K mindestens k verschiedene Gitterpunktpaare $\neq \mathfrak{o}$. Bei uns ist $k = {}^1/_2 (A+1)$.

Das Volumen von $Z(K)$ ist dann $2^{n+1} k\, m$, also schließen wir erneut nach dem oben zitierten Satz (jetzt im R_{n+1}), daß in $Z(K)$, k verschiedene Gitterpunktpaare $(\mathfrak{g}_j, h_j) \neq (\mathfrak{o}, o)$, $(j = 1, \ldots k)$ liegen, also

$$f(2h_j\mathfrak{p} \mid (l+1)-\mathfrak{g}_j) \leqq t, \quad |h_j| \leqq l+1 \tag{7}$$

gilt. Liegt der Fall vor, daß alle im Inneren liegen, dann muß sicher ein $h_j \neq o$ sein, denn sonst würde es k Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{g}_j \neq \mathfrak{o}$ mit $f(\mathfrak{g}_j) < t \leqq 1$ geben, was nicht der Fall ist. Man schließt dann mit diesem h_j so wie früher bei Satz 1 und erhält (6).

Liegt aber der Fall vor, daß von k verschiedenen Gitterpunktpaaren $(\mathfrak{g}_j, h_j) \neq (\mathfrak{o}, o)$, $(j = 1, \ldots k)$ welche (7) erfüllen, stets mindestens einer am Rand liegt, dann haben wir, da $Z(K) = 2^{n+1} k\, m$ ist, den Grenzfall des verallgemeinerten Minkowskischen Satzes, der besagt, daß dann wieder das Figurengitter $({}^1/_2 Z(K), \mathfrak{G}')$ den R_{n+1} lückenlos überdeckt. Geht man dann wieder wie bei Satz 1 vor, so ist (6) gezeigt.

Wir wollen an einem Beispiel zeigen, daß die Abschätzung (6) das Richtige trifft und daß auch das Gleichheitszeichen gilt.

Es sei Q der Quader: $|x_1| \leqq 2^{1-n} L^n (A+1)^{-1}$, $|x_2| \leqq {}^1/_2 (A+1)$, $|x_3| \leqq 1, \ldots |x_n| \leqq 1$ und $\mathfrak{G}$ das Gitter mit den Gitterpunkten

$(g_1, \ldots, g_n)$, (g ganz), also $m(\mathfrak{G}) = 1$. Dabei sei A ungerade beliebig, aber $2^{n-2}(A+1) > L^n$. Das Volumen von Q ist L^n. Im Innern von Q liegen nur die Gitterpunkte $\mathfrak{o}$, $\pm (o, s, o, \ldots o)$, $s = 1, 2, \ldots {}^1/_2 (A-1)$, ihre Anzahl ist also A. Es ist $E(p, Q, \mathfrak{G})$ für $p = ({}^1/_2, o, \ldots, o)$ gleich $(A+1)\, 2^{n-2}\, L^{-n}$, welches auch der Wert von $E(Q, \mathfrak{G})$ ist. Sind A und L so gewählt, daß $w = 2^{n-1}(A+1) \mid L^n$ ganz sind, so ist tatsächlich $2\, E(Q, \mathfrak{G}) = w$.

Das Beispiel zeigt deutlich: Je größer die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren von K im Verhältnis zum Volumen ist, um so größer muß man das Vergrößerungsverhältnis λ wählen, damit das Figurengitter $(\lambda K, \mathfrak{G})$ zu λK den R_n lückenlos überdeckt. Allgemein ist $E \geqq c_n ((A+1)\, m/J)^{1/(n-1)}$, wenn $A > 1$ und nicht n linearunabhängige Gitterpunkte in K liegen. Es ist Satz 1 in Satz 2 enthalten, wenn man (6) nicht auf $K : f(\mathfrak{x}) \leqq 1$, sondern auf $: f(\mathfrak{x}) \leqq \mu_1$ anwendet, wo $A = 1$ ist.

Enthält K mindestens n linear unabhängige Punkte, dann ist $(A+1)\, m < (n+1)!\, J$, denn es ist[3] dann $Jn! \geqq (A-n)\, m$, also $w \leqq 2^{n-1}(n+1)!$

Diese Abschätzung ist aber schwächer als die Klassische $2E \leqq n$, denn hier ist $\mu_n \leqq 1$ (Vgl. (*)). Bringt man die Minima $\mu_2, \ldots \mu_{n-1}$ ins Spiel, so kann man (2) verschärfen. (Vgl. [1]).

Satz 3:

$$2\, E(K, \mathfrak{G}) \leqq U^{1/n} \{U\}^{1-1/n} \mu_n \tag{8}$$

mit $U = 2^n m(\mathfrak{G}) \mid J \mu_1 \ldots \mu_n$.

Beweis: Wir betrachten jetzt den Zylinder $Z(K)$ definiert durch

$$f(2\, z\, \mathfrak{p} \mid (l+1) - \mathfrak{x}) \leqq t, \quad \mid z \mid \leqq (l+1)\, \mu_n^{-1} \tag{9}$$

mit $t^n = U/(l+1) \leqq 1$, $l+1 = \{U\} \geqq 1$ nach dem Minkowskischen Satz über die sukzessiven Minima. Wir nehmen nun an:

1. Im Innern von einem der n Zylinder $\mu_i Z(K)$, d. h. in

$$f(2\, z\, \mathfrak{p} \mid (l+1) - \mathfrak{x}) < \mu_i t, \quad \mid z \mid < (l+1)\, \mu_i \mid \mu_n \qquad (i = 1, \ldots n)$$

liege ein Gitterpunkt $(\mathfrak{g}, h)$ mit $h \neq o$. Dann können wir wie bei Satz 1 schließen, wenn wir beachten, daß dann $\mid h \mid < l+1$, also $\mid h \mid \leqq l$ ist und erhalten (8), gilt aber

2. Für keinen dieser n Zylinder $\mu_i Z(K)$ liegt ein Gitterpunkt $(\mathfrak{g}, h)$ mit $h \neq o$ im Innern, dann sind die ersten n Minima von $Z(K)$ im R_{n+1} ebenfalls $\mu_1(K), \ldots, \mu_n(K)$; denn dann enthält $\mu_i Z(K)$ im Innern nur

[3] Vgl. Journal für reine u. angew. Math. **187** (1950), 246—252.

Gitterpunkte $(\mathfrak{g}, o)$ und darunter gibt es nach Definition von $\mu_i(K)$ höchstens $i-1$ linear unabhängige. Auf dem Rand von $\mu_i Z(K)$ liegen aber sicher die i linear unabhängigen Gitterpunkte $(\mathfrak{g}_1, o), \ldots (\mathfrak{g}_i, o)$, wo $f(\mathfrak{g}_i) = \mu_i \quad (j = 1, \ldots i)$.

Daraus folgt aber nach dem Minkowskischen Satz über die sukzessiven Minima (angewendet auf $Z(K)$ im R_{n+1}), wo $\mu_i = \mu_i(K)$, $\mu_{n+1} = \mu_{n+1}(Z(K))$

$$J_1 \mu_1 \cdots \mu_{n-1} \mu_n^2 \leqq J_1 \mu_1 \cdots \mu_n \mu_{n+1} \leqq 2^{n+1} m \tag{10}$$

wo J_1, das Volumen von $Z(K)$, $= 2^{n+1} m / \mu_1 \cdots \mu_{n-1} \mu_n^2$ ist.

Es gilt also in (10) das Gleichheitszeichen, und es ist $\mu_{n+1}(Z(K)) = \mu_n$. Dann überdeckt aber bekanntlich das Figurengitter $(^1/_2 \mu_{n+1} Z(K), \mathfrak{G}')$ den R_{n+1} lückenlos, also auch den Punkt $(\mathfrak{o}, ^1/_2)$, d. h. es gibt ein $(\mathfrak{g}, h)$ so, daß

$$f((2h-1)\mathfrak{p} \mid (l+1) - \mathfrak{g}) \leqq {}^1/_2 \mu_n, \quad |2h-1| \leqq l+1$$

ist und es folgt alles wie früher.

Man kann unter Umständen noch in anderer Weise den Satz 2 verschärfen. Ich begnüge mich hier mit der folgenden Abschätzung (11).

Bezeichnen wir mit Δ die Dichte der dichtesten Ausfüllung des R_n durch konvexe Körper, welche aus K durch Parallelverschiebung hervorgehen und keine inneren Punkte gemeinsam haben (dabei ist die Ausfüllung nicht notwendig gitterförmig), dann gilt

Satz 4:

$$2E(K, \mathfrak{g}) \leqq V^{1-1/n} \{V\}^{1-1/n} \mu_1 \tag{11}$$

mit $V = 2^n \vartheta m(\mathfrak{G}) / J \mu_1^n$ für jedes $\vartheta > \Delta$.

Beweis: Es ist die Dichte Δ' der dichtesten Ausfüllung durch Zylinder[4] $f(\mathfrak{x}) \leqq 1$, $|z| \leqq 1$ ebenfalls Δ.

Dann enthält der Zylinder (3) mit $t^n = 2^n \vartheta m \mid J(l+1) \leqq \mu_1^n$, $l + 1 = \{V\}$ einen Gitterpunkt $(\mathfrak{g}, h) \neq (\mathfrak{o}, h)$ im Innern, da ja das Volumen des Zylinders $Z(K)$ größer als $2^{n+1} \Delta' m$ ist. Man geht nun wie im ersten Fall von Satz 1 vor.

Für die Kugel kann man z. B. nehmen $\vartheta = 2^{-n/2}(n+2)/2$, welches hier $> \Delta$ ist (vgl. [1]).

---

[4] Anz. Österr. Akad. Wiss., Wien, Math. Nat. 85 (1948), 116—119.

Inhomogene Minima von Sternkörpern.

Von

Edmund Hlawka, Wien.

(Eingelangt am 25. August 1954.)

§ 1.

Ist S ein Sternkörper mit Mittelpunkt o im R_n, $f(p)$ seine Indikatrix, $\mathfrak{G}$ ein n-dimensionales Vektorgitter mit der Determinante $m(\mathfrak{G})$, dann sei für jeden Punkt $p \in R_n$, $E(p) = E(p, S, \mathfrak{G}) = \inf f(p')$ erstreckt über alle p', welche aus p durch eine Gittertranslation aus $\mathfrak{G}$ hervorgehen. ($p' \equiv p \pmod{\mathfrak{G}}$). Wir nennen $E(S, \mathfrak{G}) = \sup_p E(p)$ die Exzentrizität oder inhomogenes Minimum. Weiter sei $\varepsilon(S) = \inf E(S, \mathfrak{G})$ erstreckt über alle Gitter $\mathfrak{G}$ mit $m(\mathfrak{G}) = 1$. Es ist $\varepsilon^{-n}(S) = \Theta(S) = \sup m(\mathfrak{G})$ erstreckt über alle Gitter $\mathfrak{G}$, welche Überdeckungsgitter zu S sind, d. h. für welche die Vereinigungsmenge aller Figuren, welche aus S durch Gittertranslationen hervorgehen, den R_n lückenlos überdecken. Wenn S beschränkt und meßbar mit Maß $m(S)$ ist, so sieht man leicht, daß $\Theta(S) \geqq m(S)$ ist. Für konvexe Körper ist wohlbekannt, daß

$$\mu_n(S, \mathfrak{G}) \leqq 2E(S, \mathfrak{G}) \leqq n\,\mu_n(S, \mathfrak{G}) \tag{A}$$

ist, wo μ_n das n-te Minimum des Punktgitters, mit Vektorgitter $\mathfrak{G}$ ist, welches den Mittelpunkt o enthält. Führt man mit *K. Mahler*[1], neben S den polaren Körper T, der wieder konvex ist, mit der Indikatrix H ein, so ist

$$1 \leqq \mu_n(S, \mathfrak{G})\,\tau_1(T, \mathfrak{H}) \leqq (n!)^2 \tag{B}$$

wo τ_1 das erste Minimum von T in Bezug auf das Punktgitter mit dem reziproken Vektorgitter $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{G}$ ist, welches o enthält; also wird

$$1/\tau_1(T, \mathfrak{H}) \leqq 2E(S, \mathfrak{G}) \leqq n\,(n!)^2/\tau_1(T, \mathfrak{H}) \tag{C}$$

Ganz anders liegt der Sachverhalt, wenn S nicht mehr konvex ist und vor allem nicht mehr beschränkt ist. Alle Sternkörper, die man bisher betrachtet hat, waren solche mit Automorphismen. Es sollen hier nicht

[1] Časopis Mat. a. Fys. 68 (1939) 93—102.

allgemeine Sternkörper ins Auge gefaßt werden, sondern nur folgender spezielle Typus betrachtet werden. Es seien Σ_1, Σ_2 zwei lineare, aufeinander senkrechte Räume durch o, von den Dimensionen n_1, n_2 mit $n_1 + n_2 = n$. In Σ_1 bzw. Σ_2 seien zwei beschränkte Sternkörper S_1, S_2 mit Mittelpunkt o und der Dimension n_1, n_2 gegeben mit den Indikatrizen f_1, f_2. Dann stellt $f = \mathrm{Max}\,(f_1, f_2) \leqq 1$ allgemein $f_\lambda = \mathrm{Max}\,(\lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2) \leqq 1$ mit $\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} = 1$ (λ_1, λ_2 reell > 0) die Indikatrix eines n-dimensionalen beschränkten Sternkörpers $S\,(\lambda_1, \lambda_2)$ dar.

Was wir nun aber untersuchen wollen, ist die Exzentrizität des Sternkörpers $S = S\,(f_1, f_2) : f_1^{n_1} f_2^{n_2} \leqq 1$. Einen einfachen Spezialfall erhalten wir, wenn S_1, S_2 Intervalle sind. Wir kommen dabei auf das Problem des Produktes von zwei Linearformen oder der inhomogenen Minima von binären indefiniten quadratischen Formen. Aus (A) folgt sofort, wenn S_1, S_2 konvex, da ja für jedes λ_1, λ_2 mit $\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} = 1$, stets $S\,(\lambda_1, \lambda_2)$ in S enthalten ist:

$$E(S, \mathfrak{G}) \leqq \frac{n}{2}\, \mu_n(S\,(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{G})$$

also

$$E(S, \mathfrak{G}) \leqq \frac{n}{2}\, \inf \mu_n(S\,(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{G}) \qquad \text{(D)}$$

wo das inf erstreckt über alle λ_1, λ_2 mit $\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} = 1$ ist. Wir können den polaren Körper $T(\lambda_1, \lambda_2)$ zu $S(\lambda_1, \lambda_2)$ einführen und erhalten

$$E(S, \mathfrak{G}) \leqq \frac{n(n!)^2}{2} \Big/ \sup \tau_1\,(T\,(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{H}) \qquad \text{(E)}$$

Dies ist alles ganz trivial. Wir fragen jetzt nach Abschätzungen von $E(S, \mathfrak{G})$ nach unten und ob sie von der gleichen Gestalt wie bei (A) und (C) sind. Es gilt nun, wie gezeigt werden wird,

Satz 1: *Sind S_1, S_2 konvex, dann ist*

$$E(S, \mathfrak{G}) \geqq c_n^{-1}\, \inf \mu_n\,(S\,(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{G}) \qquad (\mathrm{D}_1)$$

wo $c_n = 128\, n^{n/2}\, (n!)^5$ ist.

Wenn man von dem Wert von c_n, welcher vom wahren Wert sehr entfernt ist, absieht, so zeigt (D_1), daß die triviale Abschätzung (D) doch das Richtige trifft. Man kann fragen, ob es auch ein Analoges zu (E) gibt. Dies ist der Fall. Zunächst ist zu bemerken, daß für jeden beschränkten Sternkörper S (sagen wir im R_n) in Bezug auf o der polare Körper T gebildet werden kann, mit einer Indikatrix $H = \mathrm{Max}\,|\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,|$

($f(\mathfrak{x}) \leqq 1$), wenn wir die Punkte x, y durch ihre Ortsvektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ von o beschreiben. Es ist, wie S, T wieder ein beschränkter Sternkörper mit Mittelpunkt in o, denn zunächst ist er wie S, abgeschlossen. Er ist beschränkt, da wenn c_1, c_2 zwei positive Konstante mit $c_2 \mid \mathfrak{x} \mid \leqq f(\mathfrak{x}) \leqq c_1 \mid \mathfrak{x} \mid$ sind, (welche sicher existieren, da S beschränkt und $f(\mathfrak{x})$ stetig), $H(\mathfrak{y}) \geqq \geqq c_1^{-1} \mid \mathfrak{y} \mid$ ist). Man nehme $\mathfrak{x} = c_1^{-1} \mid \mathfrak{y} \mid^{-1} \mathfrak{y}$ für $\mathfrak{y} \neq 0$). Weiter ist $H(\mathfrak{y})$ stetig, denn es ist

$$H(\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = \operatorname{Max} \mid \mathfrak{x}\,(\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) \mid \leqq H(\mathfrak{y}) + \mid \mathfrak{z} \mid / c_2$$

also allgemein $\mid H(\mathfrak{y}_2) - H(\mathfrak{y}_1) \mid \leqq c_2^{-1} \mid \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1 \mid$. Damit sind die Behauptungen über T nachgeprüft.

Wir werden statt Satz 1 den viel allgemeineren Satz zeigen.

Hauptsatz: Ist S_1 konvex, dann ist

$$E(S, \mathfrak{G}) \geqq K_n^{-1} \tau^{-1} \qquad \text{(H)}$$

wo $\tau = \sup \tau_1(U(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{H})$ und $U(\lambda_1, \lambda_2)$ der Sternkörper $Max(\lambda_1 H_1, \lambda_2 H_2) \leqq 1$ ist. Dabei sind $H_1 \leqq 1$ bzw. $H_2 \leqq 1$ die polaren Körper zu S_1, S_2 in Σ_1 bzw. Σ_2, $K_n = 16\,(8 n_1^{\,1/n_1} (n_1!)^3)^{n_1/n}$. Es gibt eine nichtabzählbare Menge von Punkten p, so daß $E(p, S, \mathfrak{G}) \geqq K_n^{-1} \tau^{-1}$ ist.

(H) ist allgemeiner, da von S_2 nichtvorausgesetzt wird, konvex zu sein. Selbstverständlich können die Rollen von S_1, S_2 vertauscht werden.

Genau genommen, ist (H) nicht das Gegenstück zu (E), denn der polare Körper zu $\operatorname{Max}(\lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2) \leqq 1$, ist $T(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1^{-1} H_1 + \lambda_2^{-1} H_2 \leqq 1$. Aber man sieht sofort, daß (H) richtig bleibt, wenn U durch T ersetzt wird. Satz 1 ist eine Folge von (H), da, wenn auch S_2 konvex ist, dies auch für $S(\lambda_1, \lambda_2)$ gilt und auf diesem Körper (B) angewendet werden kann. Ist S_2 konvex, so können wir τ_1 nach dem Minkowskischen Fundamentalsatz abschätzen durch $J_1 \tau^n{}_1 \leqq 2^n m(\mathfrak{H})$, wo J_1 das Volumen von $H_1 + H_2 \leqq 1$ ist und man erhält, da $J J_1 \geqq 4^n \mid (n!)^2$, ($J$ Volumen von Max. $(f_1, f_2) \leqq 1$)

$$E^n(S, \mathfrak{G}) \geqq c_n^{-n}\, 2^n\, (n!)^2\, J^{-1}\, m(\mathfrak{G}) \qquad \text{(H')}$$

also

$$\Theta(S) \leqq c_n^n\, (n!)^2\, 2^{-n}\, J$$

Wir finden daher eine weitgehende Ähnlichkeit mit dem Sachverhalt bei konvexen Körpern. Dies gilt aber nicht für alle Sternkörper.

So ist für $S : \mid x_1^2 + \ldots + x_r^2 - (x_{r+1}^2 + \ldots + x_n^2) \mid \leqq 1 \quad (2 \leqq r < n)$ (indefinite quadratische Formen) für $n \geqq 2$

$$E(S, \mathfrak{G}) < \nu_1 + 2 \cdot 2^{n/2} \quad \nu_1^{(n-2)/2(n-1)}\, m(\mathfrak{G}) < 3 \cdot 2^{n/2}\, \nu_1^{(n-2)/2(n-1)}\, m(\mathfrak{G}) \qquad \text{(F)}$$

wo $\nu_1(S_1, \mathfrak{G})$ das erste Minimum von $S_1: 0 < x_1^2 + \ldots + x_r^2 - (x_{r+1}^2 + \ldots + x_n^2) < 1$ ist.

Nun gibt es aber Gitter mit $m(\mathfrak{G}) = 1$ und beliebig kleinen ν_1, z. B. das Gitter, definiert durch die Linearform $e\,n: x_i = z_i N^{-1/n}$ $(1 \leqq i < n)$ $x_n = N^{1-1/n} z_n$ (N natürliche Zahl), denn es ist $\nu_1 = N^{-1/n}$.

Es ist also für $n \geqq 3$, $\varepsilon(S) = 0$, $\Theta(S) = \infty$.

Für $n = 2$ gilt dies natürlich nicht, es ist ja in (H′) enthalten. Es folgt (F) sehr leicht aus den Untersuchungen von *H. Blaney*[2]. Mit den dortigen Bezeichnungen folgt für k_n:

$$k_n \leqq 2^{n-1} + 2^{n/2}\sqrt{k_{n-1}}, \text{ also da } k_2 < 3,\ k_n < 2^{n+1}$$

und die Überlegungen auf S. 158 der Arbeit geben sofort das Gewünschte. (Die Abschätzungen lassen sich natürlich verschärfen.) Für $n = 3$ hat zuerst *H. Davenport*[3] auf eine (schärfere) Abschätzung der Gestalt (F) aufmerksam gemacht, der auch (H′) zuerst[4] (in unserer Sprechweise) für $S_1 =$ Intervall, $S_2 =$ Intervall; $S_1 =$ Intervall, $S_2 =$ Kreis, $S_1 =$ = Kreis, $S_2 =$ Kreis bewiesen hat. Seine Resultate wurden von *J. K. S. Cassels*[5] erneut in einfacherer Form hergeleitet. Der Beweis von (H) wird sich der Methode von *Cassels*[6] bedienen.

§ 2.

Wir zeigen zunächst den

Hilfssatz 1: Ist eine Folge $\{\mathfrak{a}_l\}$ von Vektoren mit $|\mathfrak{a}_{l+1}| \geqq 8r|\mathfrak{a}_l| > 0$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ in einem r-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{V}_r$ gegeben, ist jedem $\mathfrak{a}_l$ dieser Folge in beliebiger Weise eine reelle Zahl μ_l und ein $\varepsilon_l = \pm 1$ zugeordnet, so gibt es einen Vektor $\mathfrak{u}$ im $\mathfrak{V}_r$, so daß für alle Glieder $\mathfrak{a}_l$ der Folge und alle ganzen Zahlen s

$$|\mathfrak{a}_l \mathfrak{u} - \mu_l - s| \geqq 1/8 \tag{1}$$

---

[2] Journ. London **23** (1948) 153—160.

[3] Journ. London **23** (1948) 189—202.

[4] Proc. Lond. math. Soc. (2) **53** (1951), 65—82; Quart. J. Math. (2) **1** (1950). 54—62; Acta math. **84** (1950) 159—79; Trans. Amer. math. Soc. **68** (1950), 508—32.

[5] Proc. Camb. Phil. Soc. **48** (1952) 72—86.

[6] Zur Methode vgl. auch *C. Chabauty* und *E. Lutz*, C. R. Acad. Sci. Paris **231** (1950) 887—8, 938—9. Der Grundgedanke wurde von *A. Chincin* in einer Reihe von Arbeiten zur Theorie der diophantischen Approximationen entwickelt zuerst in der grundlegenden Arbeit Rend. di Palermo **50** (1926) 170—195. Vgl. auch Izwestija Akad. Nauk. SSSR Ser. Math. **12**, 249—259 (1948).

und

$$^1/_2 - (\mathfrak{a}_l\, \mathfrak{u} - \mu_l - [\mathfrak{a}_l\, \mathfrak{u} - \mu_l] = \varepsilon_l \tag{2}$$

ist.* Ist die Folge $\{\mathfrak{a}_l\}$ endlich, so besitzt die Menge der $\mathfrak{u}$ mit (1), (2) innere Punkte.

Beweis: Da alle $\mathfrak{a}_l \neq 0$ sind, so können wir mit $a_l = |\,\mathfrak{a}_l\,|$, $\mathfrak{a}_l = a_l\,\mathfrak{n}_{1l}$ setzen und ergänzen $\mathfrak{n}_{1l}$ zu einem vollständigen normierten Orthogonalsystem $\mathfrak{n}_{1l}, \mathfrak{n}_{2l}, \ldots, \mathfrak{n}_{rl}$ im $\mathfrak{B}_r$, setzen weiter für $j = 1, \ldots r$, $\mu_{jl} = \mu_l$, $\gamma_{jl} = {}^1/_4$ wenn $\varepsilon_l = +1$ und ${}^3/_4$, wenn $\varepsilon_l = -1$ ist. Wir definieren weiter für $j = 1, \ldots r$ ganze Zahlen m_{jl} rekursiv so: $m_{j1} = 0$ und es seien, wenn schon die m_{jl} definiert sind, die $m_{j,\,l+1}$ so gewählt, daß

$$\mathfrak{x}_l = a_l^{-1} \sum_{j=1}^{r} (\gamma_{jl} + \mu_{jl} + m_{jl})\, \mathfrak{n}_{jl} = a_{l+1}^{-1} \sum_{j=1}^{r} (\sigma + \mu_{j,\,l+1} + m_{j,\,l+1})\, \mathfrak{n}_{j,\,l+1} \tag{3}$$

mit $0 \leqq \sigma_j < 1$ ist. Das geht, denn $\mathfrak{x}_l$ läßt sich stets in folgender Weise schreiben: $a_{l+1}^{-1} \sum (\nu_j + \mu_{j,\,l+1})\, \mathfrak{n}_{j,\,l+1}$.

Wir wählen dann $m_{j,\,l+1}$ so, daß $0 \leqq \nu_j - m_{j,\,l+1} = \sigma_j < 1$, für $j = 1, \ldots r$ ist.

Wir betrachten nun die Würfel W_l: $a_l^{-1} \sum_{j=1}^{r} (\lambda_j + \gamma_{jl} + \mu_{jl} + m_{jl})\, \mathfrak{n}_{jl}$ mit $|\,\lambda_j\,| \leqq {}^1/_8$. Es ist nun stets $W_{l+1} \subset W_l$. Denn ist $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt aus W_{l+1}, welchen wir nach (3) schreiben können:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_l + \mathfrak{y} \text{ mit } \mathfrak{y} = a_{l+1}^{-1} \sum (\varrho_j + \gamma_{j,\,l+1} - \sigma_j)\, \mathfrak{n}_{j,\,l+1}$$

so ist

$$\mathfrak{y} = a_l^{-1} \sum \lambda_j\, \mathfrak{n}_{jl}, \text{ wo } (k = 1, \ldots r)$$

$$\lambda_k = a_l\, a_{l+1}^{-1} \sum_j (\varrho_j + \gamma_{j,\,l+1} - \sigma_j)\, o_{jk} \tag{4}$$

gilt. Dabei sind die o_{jk} durch $\mathfrak{n}_{j,\,l+1} = \sum_{k=1}^{r} o_{jk}\, \mathfrak{n}_{kl}$ definiert. Es ist nun $|\,\varrho_j + \gamma_{j,\,l+1} - \sigma_j\,| \leqq 1$, $|\,o_{ik}\,| \leqq 1$, also $|\,\lambda_k\,| \leqq (8r)^{-1}\, r = 1/8$, d. h. $\mathfrak{x}$ liegt in W_l.

Ist D der nicht leere Durchschnitt aller W_l, der, wenn die Folge endlich ist, selbst ein Würfel ist, also innere Punkte besitzt, dann erfüllt jedes $\mathfrak{u}$ aus D die Behauptung. Um (1) und (2) für ein l und alle ganzen s einzusehen, beachten wir, daß $\mathfrak{u}$ in W_l liegt, also die Gestalt

$$a_l^{-1} \sum_{j=1}^{r} (\lambda_j + \gamma_{jl} + \mu_{jl} + m_{jl})\, \mathfrak{n}_{jl}$$

---

* $[x]$ nächst kleinere ganze Zahl an x.

besitzt. Es ist daher $\mathfrak{a}_l\,\mathfrak{u} - \mu_l - s = \gamma_l + \lambda_1 + h$, wo $h = m_{1l} - s$ ganz ist. Dabei wurde benützt, daß $\mathfrak{a}_l$ orthogonal auf $\mathfrak{n}_j$ für $j \geqq 2$ ist.

Ist nun $\varepsilon_l = +1$, dann ist für $h \geqq 0$, $\gamma_l + \lambda_1 + h \geqq 1/8$ und $\leqq -5/8$, wenn $h \leqq -1$. Dabei wurde benützt, daß $|\lambda_1| \leqq 1/8$ und $\gamma_l = 1/4$ ist. Analog schließt man für $\varepsilon_l = -1$ und erhält damit (1). Weiter ist $\mathfrak{a}_l\,\mathfrak{u} - \mu_l - [\mathfrak{a}_l\,\mathfrak{u} - \mu_l] = \gamma_l + \lambda_1 - [\gamma_l + \lambda_1]$ und man sieht sofort, daß auch (2) zutrifft.

Hilfssatz 2: Es sei im euklidischen r-dimensionalen Raum R_r durch $F(x)$ die Distanzfunktion eines konvexen Körpers mit Mittelpunkt o gegeben. ($\mathfrak{x}$ Ortsvektor eines Punktes x in Bezug auf o). Es gibt dann ein affines Koordinatensystem $u_1\,\mathfrak{m}_1 + \ldots + u_r\,\mathfrak{m}_r$ mit Ursprung o, so daß mit passendem $\mu > o$,

$$u\,\mu\,(r\,c_r)^{-1} \leqq F(x) \leqq r^{1/2}\,\mu\,u \tag{5}$$

gilt, wo $u = (u_1^2 + \ldots + u_r^2)^{1/2}$ und $c_r = r\,(r!)^3$ ist.

Beweis: Wir können, da o fest ist, die Punkte x, auch durch ihre Ortsvektoren $\mathfrak{x}$ von o beschreiben. Wir betrachten nun ein maximales Gitter Γ von F mit der Determinante $m(\Gamma) = 1$. Ihre r sukzessiven Minima $\mu_1, \ldots, \mu_r$ sind einander gleich $= \mu$. Ist $\mu_i = F(\mathfrak{m}_i)$, dann läßt sich jeder Vektor $\mathfrak{x}$ schreiben $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{r} u_i\,\mathfrak{m}_i$, und es ist $1 \leqq |\text{Det.}\,(m_1, \ldots, \mathfrak{m}_r)| \leqq r!$ Es sei nun $H(\mathfrak{y})$ die polare Distanzfunktion und ihre Minima seien $\tau_i = H(\mathfrak{t}_i)$ mit $1 \leqq |\text{Det.}\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_r)| \leqq r!$. Da stets $F(\mathfrak{x})\,H(\mathfrak{y}) \geqq |\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}|$ ist, so folgt

$$|\mathfrak{x}\,\mathfrak{t}_i| = \Big|\sum_j u_j\,\mathfrak{m}_j\,\mathfrak{t}_i\Big| \leqq \tau_j\,F(\mathfrak{x}) \qquad (i = 1, \ldots r).$$

Nach den u_j aufgelöst, gilt, da die Gleichungsdeterminante $\geqq 1$ ist,

$$|u_l| \leqq F(\mathfrak{x}) \sum_{m=1}^{r} \tau_m\,A_{lm},$$

wo A_{lm} die $r-1$ zeilige Unterdeterminante ist, welche aus der Gleichungsdeterminante durch Streichen der l-ten Spalte und der m-ten Zeile entsteht.

Da $|\mathfrak{m}_j\,\mathfrak{t}_i| \leqq \mu_j\,\tau_i$, so ist $A_{lm} \leqq (r-l)!\,\prod_{j \neq l} \mu_j \prod_{i \neq m} \tau_i \leqq (r!)^3\,(r\,\mu_l\,\tau_m)^{-1}$

also $|u_l| \leqq (r!)^3\,F(\mathfrak{x})\,\mu^{-1}$, da $\prod_{i=1}^{r} \mu_i\,\tau_i \leqq (r!)^2$ und $\mu_i = \mu$ ist.

Weiters ist $F(\mathfrak{x}) \leqq \Sigma\,|u_i|\,F(\mathfrak{m}_i) \leqq \mu\sqrt{r}\,u$ und damit ist alles gezeigt.

Hilfssatz 3: Es erfülle $F(\mathfrak{x})$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2. Es sei weiter eine Folge $\{\mathfrak{b}_l\}$ von Vektoren mit $F(\mathfrak{b}_{l+1}) \geqq 8\, r^{7/2}\, (r!)^3\, F(\mathfrak{b}_l) > 0$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ gegeben und jedem $\mathfrak{b}_l$ dieser Folge sei in beliebiger Weise eine reelle Zahl μ_l und ein $\varepsilon_l = \pm 1$ zugeordnet. Es gibt dann einen Vektor $\mathfrak{v}$, so daß für alle $\mathfrak{b}_l$ der Folge und alle ganzen Zahlen s

$$\left| \mathfrak{b}_l\, \mathfrak{v} - \mu_l - s \right| \geqq 1/8 \tag{6}$$

und

$$^1/_2 - (\mathfrak{b}_l\, \mathfrak{v} - \mu_l - [\mathfrak{b}_l\, \mathfrak{v} - \mu_l]) = \varepsilon_l \tag{7}$$

gilt. Ist die Folge $\{\mathfrak{b}_l\}$ endlich, so besitzt die Menge der $\mathfrak{v}$ mit (6), (7) innere Punkte.

Beweis: Nach Hilfssatz 2 gibt es ein Koordinatensystem $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{r} u_i\, \mathfrak{m}_i$ mit (5). Das r-Tupel $(u_l, \ldots u_r) = \mathfrak{u}$ der Koordinaten von $\mathfrak{b}_l$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}_l = (u_{1l}, \ldots, u_{rl})$, $\left| \mathfrak{a}_l \right| = (u_{1l}^2 + \ldots + u_{rl}^2)^{1/2}$.

Es ist nun

$$\left| \mathfrak{a}_{l+1} \right| \geqq (\mu \sqrt{r})^{-1} F(\mathfrak{b}_{l+1}) \geqq 8\, \mu^{-1}\, r^3\, (r!)^3\, F(\mathfrak{b}_l) \geqq 8\, r \left| \mathfrak{a}_l \right| > 0$$

Es sind daher die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt und es gibt also $\mathfrak{u} = (u_1, \ldots, u_r)$, welche (1), (2) erfüllen. Ist nun $\mathfrak{v} = \mathfrak{M}^{*-1}\, \mathfrak{u}$, wo $\mathfrak{M}$ die Matrix $(\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r)$ ist, ($\mathfrak{M}^*$ transponierte Matrix), so ist das skalare Produkt $\mathfrak{a}\, \mathfrak{u}$ in Matrixschreibweise, da $\mathfrak{b}_l = \mathfrak{M}\, \mathfrak{a}_l$, gleich $(\mathfrak{M}^{-1}\, \mathfrak{b}_l)^*\, \mathfrak{M}^*\, \mathfrak{v} = \mathfrak{b}_l^*\, \mathfrak{v}$ und es ist damit alles gezeigt, da ja durch diese Transformation, innere Punkte in innere Punkte übergehen.

§ 3.

Wir gehen jetzt zum Beweis des Hauptsatzes (H) über. Da der Punkt o ein ausgezeichneter Punkt ist, können wir die Punkte x des R_n durch die Ortsvektoren $\mathfrak{x}$ in Bezug auf o festlegen. Die Projektion von $\mathfrak{x}$ auf die Räume Σ_1 bzw. Σ_2 von den Dimensionen n_1, n_2 bezeichnen wir mit $P_1\, \mathfrak{x}$ bzw. $P_2\, \mathfrak{x}$. Es ist stets $\mathfrak{x}\, \mathfrak{y} = P_1\, \mathfrak{x}\, P_1\, \mathfrak{y} + P_2\, \mathfrak{x}\, P_2\, \mathfrak{y}$. Die Indikatrizes $f_1(\mathfrak{x})$, $f_2(\mathfrak{x})$ der beschränkten Sternkörper S_1, S_2 hängen nur von $P_1\, \mathfrak{x}$ bzw. $P_2\, \mathfrak{x}$ ab. $H(\mathfrak{x}) = \mathrm{Max}\,(H_1(\mathfrak{x}), H_2(\mathfrak{x}))$ ist die polare Indikatrix zu $f = f_1 + f_2$. $\mathfrak{H}$ sei das reziproke Gitter zu $\mathfrak{G}$, wo o. B. d. A. $m(\mathfrak{G}) = m(\mathfrak{H}) = 1$ ist. Die Gitterpunkte von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$, also $\mathfrak{g}\, \mathfrak{h}$ stets ganz. τ war $\sup \tau_1(U(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{G})$, wo $\tau_1(U(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{G})$ das erste Minimum von

$$U : \mathrm{Max}\,(\lambda_1 H_1, \lambda_2 H_2) \leqq 1,\ \lambda_1^{n_1}\, \lambda_2^{n_2} = 1,\ \text{für } \mathfrak{H}.$$

Für $8\, n_1^{n_1} (n_1!)^3$ setzen wir kurz C.

Es sei $F(\mathfrak{S})$ ein beschränkter Fundamentalbereich von $\mathfrak{S}$.

Der Beweis des Satzes wird in mehreren Schritten geführt.

Hilfssatz 4: (H) ist für $\mathfrak{S}$ richtig, wenn es in $\mathfrak{H}$ eine Folge $S = S(I)$ von Gittervektoren $\mathfrak{h}_j \neq 0$ $(-\infty < j < \infty)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$\begin{aligned}
&1.\ H_1^{n_1}(\mathfrak{h}_j)\, H_2^{n_2}(\mathfrak{h}_j) \leqq \tau^n \\
&2.\ C\, H_1(\mathfrak{h}_j) \leqq H_1(\mathfrak{h}_{j-1}) \\
&3.\ H_1^{n_1}(\mathfrak{h}_{j-1})\, H_2^{n_2}(\mathfrak{h}_j) \leqq C^{n_1} \tau^n \qquad \text{(I)} \\
&4.\ H_1(\mathfrak{h}_j) > 0 \text{ für alle } j \\
&5.\ H_2(\mathfrak{h}_j) \geqq H_2(\mathfrak{h}_{j-1})
\end{aligned}$$

Man beachte bei Bedingung (4), daß $H_1(\mathfrak{h})$ bzw. $H_2(\mathfrak{h})$ nur von $P_1\,\mathfrak{h}$ bzw. $P_2\,\mathfrak{h}$ abhängen, daß also z. B. $H_1(\mathfrak{h}) = 0$ genau dann 0, wenn $P_1\,\mathfrak{h} = 0$ ist.

Beweis: Es ist

$$\lim_{j\to\infty} H_1(\mathfrak{h}_j) = o, \quad \lim_{j\to-\infty} H_1(\mathfrak{h}_j) = \infty \tag{8}$$

denn aus der Eigenschaft 2. folgt $H_1(\mathfrak{h}_j) \leqq H_1(\mathfrak{h}_0)\, C^{-j}$ $(j \geqq o)$

$$H_1(\mathfrak{h}_j) \geqq C^{-j}\, H_1(\mathfrak{h}_0) \quad (j \leqq -1).$$

Weiter ist

$$\lim_{j\to\infty} H_2(\mathfrak{h}_j) = \infty, \quad \lim_{j\to-\infty} H_2(\mathfrak{h}_j) = o \tag{9}$$

Die zweite Relation in (9) folgt aus 1. und der zweiten Relation in (8). Wäre die erste Relation (9) nicht richtig, dann gäbe es ein $K > 0$ und ein $j_0 > o$, so daß für alle $j > j_0$, $H(\mathfrak{h}_j) = \mathrm{Max}\,(H_1(\mathfrak{h}_j), H_2(\mathfrak{h}_j)) < K$ (es geht ja nach (8) $H_1(\mathfrak{h}_j) \to o$, für $j \to \infty$). In dem beschränkten Körper $H(\mathfrak{h}) < K$ können nur endlich viele verschiedene $\mathfrak{h}$ liegen; es gäbe also eine unendliche Teilfolge (j_n), so daß stets $\mathfrak{h}_{j_k} = \mathfrak{h} \neq 0$ und es wäre nach (8) $H_1(\mathfrak{h}) = 0$, im Widerspruch zu 4.

Wir zeigen jetzt weiter: Ist $\{\varepsilon_j\}$ eine beliebig vorgegebene Folge mit $\varepsilon_j = \pm 1$, dann gibt es ein t, so daß für alle j und alle ganzen s

$$\left| \mathfrak{h}_j\, t - s \right| \geqq 1/8 \tag{10}$$

$$1/2 - (\mathfrak{h}_j\, t - [\mathfrak{h}_j\, t]) = \varepsilon_j \tag{11}$$

gilt. Ist nämlich m eine beliebige natürliche Zahl, dann wenden wir auf die Folge der Vektoren $\mathfrak{b}_i = P_1\, \mathfrak{h}_{m-i}$ $(i = o, 1, 2 \ldots 2m+1)$ im Vektorraum $\mathfrak{V}r$ von Σ_1, $(r = n_1)$, $F = H_1$, den Hilfssatz 3 mit $\mu_i = o$ an, denn es ist nach 2.

$$H_1(\mathfrak{h}_{i+1}) = H_1(\mathfrak{h}_{m-i}) \geqq C\, H_1(\mathfrak{h}_{m-i+1}) = C\, H_1(\mathfrak{h}_i).$$

Es gibt also ein $\mathfrak{v}_m$ mit $P_1\, \mathfrak{v}_m = \mathfrak{v}_m$ (da ja $\mathfrak{v}_m$ in Σ_1), so daß für alle ganzen s

$$|\, \mathfrak{h}_j\, \mathfrak{v}_m - s\,| \geqq 1/8 \tag{10'}$$

$$1/2 - (\mathfrak{h}_j\, \mathfrak{v}_m - [\mathfrak{h}_j\, \mathfrak{v}_m]) = \varepsilon_j \tag{11'}$$

für alle j mit $-(m+1) \leqq j \leqq m$ gilt. Ist $\mathfrak{g}_m$ aus $\mathfrak{G}$ so gewählt, daß $\mathfrak{v}_m + \mathfrak{g}_m = \mathfrak{w}_m$ in $F(\mathfrak{G})$, dann gilt auch für $\mathfrak{w}_m$

$$|\, \mathfrak{h}_j\, \mathfrak{w}_m - s\,| \geqq 1/8,\ 1/2 - (\mathfrak{h}_j\, \mathfrak{w}_m - [\mathfrak{h}_j\, \mathfrak{w}_m]) = \varepsilon_j \tag{12}$$

$(-(m+1) \leqq j \leqq m)$, da ja $\mathfrak{h}_j\, \mathfrak{g}_m$ ganz und s beliebig ist.

Jeder Häufungspunkt t der beschränkten Folge $\{\mathfrak{w}_m\}$ erfüllt nun (10), wie aus der ersten Relation in (12) sofort folgt, da ja die linke Seite bei festem $\mathfrak{h}_j$ und s stetig in t ist. Daraus folgt, daß für alle j nie $\mathfrak{h}_i\, t$ eine ganze Zahl ist, da man ja sonst für s einfach $\mathfrak{h}_j\, t$ nehmen kann, um einen Widerspruch zu erhalten. Für solche t ist aber bei festem $\mathfrak{h}_j$ und s auch die linke Seite von (11) in t stetig, daher folgt durch direkten Grenzübergang aus (12) auch (11).

Aus (10), (11) folgern wir, da die Menge sämtlicher Folgen $\{\varepsilon_j\}$ nicht abzählbar ist, daß auch die Menge der Vektoren t, welche (10) allein erfüllen, ebenfalls nicht abzählbar ist. Denn die t, welche zu verschiedenen Folgen $\{\varepsilon_j\}$ gehören, sind ebenfalls voneinander verschieden. Ist t ein beliebiger Vektor mit (10), so folgt mit $s = \mathfrak{g}\, \mathfrak{h}_j$, für alle $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ und alle j

$$f_1(\mathfrak{g}-t)\, H_1(\mathfrak{h}_j) + f_2(\mathfrak{g}-t)\, H_2(\mathfrak{h}_j) \geqq |\, P_1(\mathfrak{g}-t)\, P_1\, \mathfrak{h}_j\,| + |\, P_2(\mathfrak{g}-t)\, P_2\, \mathfrak{h}_j\,| \geqq$$
$$\geqq |\, t\, \mathfrak{h}_j - s\,| \geqq 1/8. \tag{13}$$

Daraus folgt $f_1(\mathfrak{g}-t) \neq o$, $f_2(\mathfrak{g}-t) \neq o$, denn ist z. B. $f_1(\mathfrak{g}-t) = o$, dann folgt aus (13) und (9) für $j \to -\infty$: $0 \geqq 1/8$. Analog widerlegt man mittels (8) für $j \to \infty$ die Annahme $f_2(\mathfrak{g}-t) = 0$,

Da nach (5.) und (9), $H_2(\mathfrak{h}_j)$ von o nach ∞ monoton zunimmt, so gibt es ein j, so daß

$$H_2(\mathfrak{h}_{j-1}) \leqq C^{n_1/n}\, \tau\, (f_1\, f_2^{-1})^{n_1/n} \leqq H_2(\mathfrak{h}_j) \tag{14}$$

ist, wo in f_1, f_2 das Argument $\mathfrak{g}-t$ unterdrückt ist. Aus (3.) und (14) folgt unmittelbar

$$H_1(\mathfrak{h}_{j-1}) \leqq C^{n_1/n}\, \tau\, (f_1^{-1}\, f_2)^{n_2/n}. \tag{15}$$

Daher folgt aus (13) und (15) mit $j-1$ statt j, sofort

$$(f_1^{n_1} f_2^{n_2})^{1/n} \geqq (16\,\tau\, C^{n_1/n})^{-1}$$

was die Behauptung ist.

Hilfssatz 5: Ist in $\mathfrak{H}$ für alle $\mathfrak{h} \neq 0$ sowohl $H_1(\mathfrak{h})$ wie $H_2(\mathfrak{h})$ von 0 verschieden, dann gibt es in $\mathfrak{H}$ eine Folge S (I). Es ist dann nach Hilfssatz 4, der Satz richtig.

Beweis: Es sei $M > 1$ beliebig, dann gibt es ein $\mathfrak{h}_{0M}{}^* = \mathfrak{h}_0{}^* \neq 0$, so daß

$$1.\quad H_1(\mathfrak{h}_0{}^*) \geqq M,\quad H_2(\mathfrak{h}_0{}^*) \leqq M^{-1}.$$

Denn nach Definition von τ gibt es zu jedem $v \geqq 1$ ein $\mathfrak{h}_v \neq 0$, so daß

$$H_1(\mathfrak{h}_v) \leqq (\tau\, M\, v)^{n_2/n_1},\quad H_2(\mathfrak{h}_v) \leqq (M\, v)^{-1} \tag{16}$$

gilt. Wir nennen die $\mathfrak{h}_v$ von (16), für die $H_2(\mathfrak{h}_v)$ am kleinsten ist. Wäre nun für alle v stets $H_1(\mathfrak{h}_v) \leqq M$, so würden alle $\mathfrak{h}_v$ in dem beschränkten Körper $H(\mathfrak{h}) \leqq M$ liegen. Daher folgt nach einer schon früher verwendeten Schlußweise, daß es dann ein $\mathfrak{h} \neq o$ geben müßte, mit $H_2(\mathfrak{h}) = 0$, im Widerspruch zur Annahme.

Für $\mathfrak{h}_0{}^*$ gelte (16) mit $v = v_0$ und man beachte, daß $H_2(\mathfrak{h}_{v_0}) = H_2(\mathfrak{h}_0{}^*)$, minimal sein soll. Dann definieren wir rekursiv eine Kette S' von Vektoren $\mathfrak{h}_l{}^* = \mathfrak{h}_{lM}{}^*$ $(l = 1, 2, \ldots)$ rekursiv durch

$$H_1(\mathfrak{h}_l^*) \leqq C^{-1} H_1(\mathfrak{h}_{l-1}^*),\ H_2(\mathfrak{h}_l^*) \leqq \tau^{n/n_2} (C\, H_1{}^{-1}(\mathfrak{h}_{l-1}^*))^{n_1/n_2} \tag{17 l}$$

für $l \geqq 1$, was geht, da ja stets $H_1(\mathfrak{h}) \neq 0$ ist. Dabei wurde nun $\mathfrak{h}_l{}^*$ so gewählt, daß $H_2(\mathfrak{h}_l{}^*)$ minimal ist. Dann ist stets $H_2(\mathfrak{h}_l{}^*) \geqq H_2(\mathfrak{h}_l{}^*)$. Wäre für $l = 1$, $H_2(\mathfrak{h}_1{}^*) < H_2(\mathfrak{h}_0{}^*)$, dann wäre nach (17): $H_1(\mathfrak{h}_1{}^*) < H_1(\mathfrak{h}_0{}^*)$ also $\mathfrak{h}_1{}^*$ Lösung von (16) mit kleinerem H_2. Ist $l \geqq 2$ und $H_2(\mathfrak{h}_l{}^*) < H_2(\mathfrak{h}_{l-1}^*)$, dann wäre nach (17), da $H_1(\mathfrak{h}_i{}^*) < H_1(\mathfrak{h}_{l-i})$, $\mathfrak{h}_l{}^*$ Lösung der Gleichung (17 $(l-1)$) mit kleineren H_2 als $\mathfrak{h}_{l-i}$, was der Wahl von $\mathfrak{h}_{l-1}^*$ widerspricht.

Es gibt sicher ein L, so daß $H_1(\mathfrak{h}_L{}^*) \leqq M^{-1}$, $H_2(\mathfrak{h}_l{}^*) \geqq M$, denn aus (17 l) folgt, daß $\lim\limits_{l \to \infty} H_1(\mathfrak{h}_l{}^*) = 0$; es gibt also ein L_0, so daß für alle $L > L_0$ sicher $H_1(\mathfrak{h}_l{}^*) \leqq M^{-1}$ ist. Wäre nun für alle $\mathfrak{h}_l{}^*$ $H_2(\mathfrak{h}_l{}^*) < M$ $(l \geqq L_0)$, so folgt wieder in üblicher Weise, daß es dann ein $\mathfrak{h} \neq 0$ geben müßte, so daß $H_1(\mathfrak{h}) = 0$ ist, was nicht sein soll.

Damit ist jetzt aus S' eine endliche Folge S_M $(0 \leqq l \leqq L)$ herausgegriffen, mit folgenden Eigenschaften (man benütze noch 17 l):

1. $H_1^{n_1}(\mathfrak{h}_l{}^*)\, H_2^{n_2}(\mathfrak{h}_l{}^*) \leqq \tau^n$
2. $C\, H_1(\mathfrak{h}_l{}^*) \leqq H_1(\mathfrak{h}_{l-1}{}^*)$
3. $H_1^{n_1}(\mathfrak{h}_{l-1}{}^*)\, H_2^{n_2}(\mathfrak{h}_l{}^*) \leqq C^{n_1} \tau^n$

$$4.\ H_1(\mathfrak{h}_0^*) \geqq M > 1,\ H_2(\mathfrak{h}_0^*) \leqq M^{-1} \qquad \text{(II)}$$
$$5.\ H_1(\mathfrak{h}_L^*) \leqq M^{-1} < 1,\ H_2(\mathfrak{h}_L^*) \geqq M$$
$$6.\ H_2(\mathfrak{h}_l^*) \geqq H_2(\mathfrak{h}_{l-1}^*).$$

Bevor wir den Beweis von Hilfssatz 5 zu Ende führen, schalten wir folgenden Hilfssatz ein:

Hilfssatz 6: Es sei $K > 0$ und $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}''$ seien irgendwelche Vektoren aus $\mathfrak{H}$ mit:

$$\text{a) } H_1^{n_1}(\mathfrak{h}'')\, H_2^{n_2}(\mathfrak{h}'') \leqq \tau^n, \quad \text{b) } H_1^{n}(\mathfrak{h}'')\, H_2^{n_2}(\mathfrak{h}') \leqq \tau^n C^{n_1},$$
$$\text{c) } H_1(\mathfrak{h}') \leqq K \leqq H_1(\mathfrak{h}''). \qquad (18)$$

Behauptung: Es gibt bei festem K, nur endlich viele $\mathfrak{h}'$, zu welchen mindestens ein $\mathfrak{h}''$ mit (18) gehört. Zu jedem $\mathfrak{h}'$ mit $H_2(\mathfrak{h}') \neq 0$ gibt es nur endlich viele $\mathfrak{h}''$ mit (18).

Bemerkung: Es ist nicht vorausgesetzt, daß stets $H_1(\mathfrak{h})$ bzw. $H_2(\mathfrak{h})$ von Null verschieden ist.

Beweis: Es ist nach b) c) $H_1(\mathfrak{h}') \leqq K$, $H_2^{n_2}(\mathfrak{h}') \leqq \tau^n (C K^{-1})^{n_1}$. Es gibt also nur endlich viele $\mathfrak{h}'$. Ist $H_2(\mathfrak{h}') \neq 0$, dann ist $H_1^{n_1}(\mathfrak{h}'') \leqq$ $\leqq \tau^n C^{n_1} H_2^{-n_2}(\mathfrak{h}')$ und aus a), c) folgt $H_2^{n_2}(\mathfrak{h}'') \leqq \tau^n K^{-n_1}$. Daher ist bei festem K und $\mathfrak{h}'$ die Anzahl der $\mathfrak{h}''$ beschränkt.

Jetzt kann der Beweis von Hilfssatz 5 zu Ende geführt werden. Nach 2. ist in jedem S_M, $H_1(\mathfrak{h}_l^*)$ in l monoton abnehmend wegen 4., 5. gibt es ein eindeutig bestimmtes N (M), so daß

$$H_1(\mathfrak{h}_N^*) \leqq 1 < H_1(\mathfrak{h}_{N-1}^*) \qquad (18')$$

gilt und wir setzen $\mathfrak{h}_j = \mathfrak{h}_{j+N}^*$ ($-N \leqq j \leqq L - N = R$). Dann gelten für die $\mathfrak{h}_j$ (deutlicher $\mathfrak{h}_{jM}$) die Eigenschaften 1., 2., 3., 6. Die Eigenschaften 4., 5. schreiben sich jetzt so:

$$H_1(\mathfrak{h}_{-N,M}) \geqq M, H_2(\mathfrak{h}_{-N,M}) \leqq M^{-1} \text{ bzw. } H_1(\mathfrak{h}_{R,M}) \leqq M^{-1}, H_2(\mathfrak{h}_{R,M}) \geqq M$$

Daher ist $\lim H_1(\mathfrak{h}_{-N,M}) = \lim H_2(\mathfrak{h}_{R,M}) = \infty$ für $M \to \infty$.

In der neuen Schreibweise ist jetzt (18')

$$H_1(\mathfrak{h}_{0M}) \leqq 1 < H_1(\mathfrak{h}_{-1,M}) \qquad (18'')$$

Nach Hilfssatz 6 mit K = 1 gibt es nur endlich viele verschiedene Vektoren $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_{-1}$ mit $H_1(\mathfrak{h}_0) \leqq 1 < H_1(\mathfrak{h}_{-1})$. Wenn also M alle ganze Zahlen > 1 durchläuft, so folgt, daß es eine unendliche Teilfolge $\{M_{l1}\}$ gibt, für welche $\mathfrak{h}_{0M}$ bzw. $\mathfrak{h}_{-1,M}$ gleiche Werte $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_{-1}$ annehmen. Wir betrachten nur mehr solche Systeme $S_{M_{l1}}$ ($l = 1, 2, \ldots$), welche $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_{-1}$ enthalten. Wenn M die Teilfolge $\{M_{l1}\}$ durchläuft, so kann es wieder nach Hilfssatz 6 mit $K = H_1(\mathfrak{h}_0)$ nur endlich viele verschiedene

$\mathfrak{h}_{1\,M}$ (da $H_1(\mathfrak{h}_{1M}) \leqq H_1(\mathfrak{h}_0) < H_1(\mathfrak{h}_{-1})$) und analog nur endlich viele verschiedene $\mathfrak{h}_{-2\,M}$ (da $H_1(\mathfrak{h}_0) < H_1(\mathfrak{h}_{-1}) < H_1(\mathfrak{h}_{-2\,M})$) geben. Es sei $\{M_{i2}\}$ die Teilfolge von $\{M_{i1}\}$, welche die gleichen $\mathfrak{h}_{-2,\,M} = \mathfrak{h}_{-2}$ und $\mathfrak{h}_{1\,M} = \mathfrak{h}_1$ besitzen. Dieser Prozeß liefert im j-ten Schritt eine Teilfolge $\{M_{ij}\}$, welche alle die gleichen Vektoren $\mathfrak{h}_{-(j+1)}, \mathfrak{h}_{-j}, \ldots \mathfrak{h}_j$ enthalten und erhalten auf diese Weise eine unendliche Folge $\{\mathfrak{h}_j\}$ $(-\infty < j < \infty)$. Diese Folge erfüllt nach Konstruktion die Eigenschaften, welche an eine S (I) Folge gestellt werden und damit ist der Hilfssatz bewiesen. Die ganze Überlegung bleibt richtig, wenn es für eine unendliche Folge von M-Werten zugehörige S_M-Ketten gibt.

Es werde nun stets vorausgesetzt, daß in $\mathfrak{H}$ keine S (I) Folge liegt.

Hilfssatz 7: Gibt es in $\mathfrak{H}$ eine Folge $S = S(\mathrm{II})$ $(-\infty < j \leqq L)$ von Vektoren $\neq o$ aus $\mathfrak{H}$ $(L \geqq 1)$, so daß 1., 2., 3., 5. von (I) erfüllt sind, gilt 4') (statt 4): $H_1(\mathfrak{h}_j) > 0$ für $j < L$, $H_1(\mathfrak{h}_L) = 0$, dann gilt der Satz (H).

Beweis: Man schließt wie in Hilfssatz 4), daß

$$\lim_{j \to -\infty} H_1(\mathfrak{h}_j) = \infty, \quad \lim_{j \to -\infty} H_2(\mathfrak{h}_j) = 0. \tag{19}$$

Es gibt nun eine nicht abzählbare Menge von Vektoren $\mathfrak{t}_2$ mit $P_2\,\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2$, so daß für alle ganzzahligen s

$$|\,\mathfrak{h}_L\,\mathfrak{t}_2 - s\,| \geqq 1/8 \tag{20}$$

gilt. Jedes $\mathfrak{t}_2$ von der Gestalt $v^{-1}((\lambda_1+1/2)\,\mathfrak{n}_1+\lambda_2\mathfrak{n}_2+\ldots+\lambda_s\,\mathfrak{n}_s)$, wo $\mathfrak{n}_1, \ldots \mathfrak{n}_s$ $(s = n_2)$ ein normiertes orthogonales System von Einheitsvektoren im Raum Σ_2 mit $v = |\,\mathfrak{h}_L\,| > 0$ ist. (Es ist ja $\mathfrak{h}_1$ in Σ_2), $\mathfrak{h}_L = v\,\mathfrak{n}_1$, $|\,\lambda_1\,| \leqq 3/8$ leistet das Gewünschte, denn es ist $\mathfrak{h}_L\,\mathfrak{t}_2 - s = \lambda_1 + 1/2 - s$, für $s \leqq 0$ stets $\geqq 1/8$ und für $s \geqq 1$ stets $\leqq -1/8$. Wendet man auf die Vektoren $\mathfrak{b}_i = P_1\,\mathfrak{h}_{L-i}$ $(1 \leqq i < \infty)$ Hilfssatz 3 mit $\mu_i = \mathfrak{b}_i\,\mathfrak{t}_2$, an (die ε_i seien irgendwie fest gewählt), so erhalten wir, daß es für $-\infty < j < L$ und alle ganzen s einen Vektor $\mathfrak{t}_1$ gibt, so daß $(\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2)$

$$|\,\mathfrak{h}_j\,\mathfrak{t} - s\,| = |\,\mathfrak{h}_j\,\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{h}_j\,\mathfrak{t}_2 - s\,| \geqq 1/8. \tag{21}$$

Daraus folgt, für alle j mit $-\infty < j \leqq L$, für alle $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$

$$f_1(\mathfrak{g} - \mathfrak{t})\,H_1(\mathfrak{h}_j) + f_2(\mathfrak{g} - \mathfrak{t})\,H_2(\mathfrak{h}_j) \geqq 1/8. \tag{22}$$

Dies ist für die $j < L$ richtig, wie man bei (13) sieht. Ist aber $j = L$, so wird die linke Seite von (22): $f_2(\mathfrak{g} - \mathfrak{t})\;H_2(\mathfrak{h}_j) \geqq |\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{h}_L - \mathfrak{g}\,\mathfrak{h}_L\,|$, also nach (20) ebenfalls $\geqq 1/8$; denn es ist $\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{h}_L = 0$, da $\mathfrak{t}_1$ in Σ_1, $\mathfrak{h}_L$ im dazu senkrechten Raum Σ_2.

Man schließt wie früher $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ (jetzt $j = L$ statt $j \to \infty$). Ist nun $C^{n_1/n}\, \tau(f_1 f_2^{-1})^{n_1/n} \leqq H_2(\mathfrak{h}_L)$, dann gibt es ein j mit (14) und der Beweis kann wie in Hilfssatz 4 zu Ende geführt werden. Ist aber $C^{n_1/n}\, \tau\,(f_1 f_2^{-1})^{n_1/n} > H_2(\mathfrak{h}_L)$, dann wenden wir dies auf (22) mit $j = L$ an und wir erhalten den Satz sogar mit einer schärferen Abschätzung.

Hilfssatz 8: Ist für jedes $\mathfrak{h} \neq o$ von $\mathfrak{H}$ stets $H_2(\mathfrak{h}) \neq o$, dann gibt es in $\mathfrak{H}$ Folgen S (II).

Beweis: Wir konstruieren wie in Hilfssatz 5 zu gegebenen $M > 1$, die Kette S'. Diese Kette kann wie dort mit $\mathfrak{h}_0{}^*$ begonnen werden, da ja H_2 stets $\neq 0$ sein soll, es kann aber sein, daß von einer Stelle T an, $H_1(\mathfrak{h}_T) = o$ ist. Dann bricht die Kette dort ab. Man kann annehmen, daß von endlich vielen M abgesehen, die Ketten stets abbrechen, da sonst eine Folge S (I) konstruiert werden könnte, was nicht sein soll. Für alle genügend großen M, haben wir also Ketten $S'_M : \{\mathfrak{h}^*_{jM}\}$ $(o \leqq j \leqq \leqq T(M))$, die 1., 2., 3., 4., 6. von (II) erfüllen, nur gilt statt 5. die Eigenschaft 5': $H_1(\mathfrak{h}_T) = o$, $H_1(\mathfrak{h}_j) > o$ $(j < T)$.

Es gibt dann wieder ein eindeutig bestimmtes $N(M)$, so daß (18) gilt.

Wenn wir wieder $\mathfrak{h}_{j,M} = \mathfrak{h}^*_{j+N,M}$ setzen $(-N \leqq j \leqq T - N)$, so haben wir wieder (18') und es gilt $\lim\limits_{M \to \infty} H_1(\mathfrak{h}_{-N,M}) = \infty$.

Wir können nun so vorgehen (es ist ja stets $H_2 \neq 0$), so daß der Hilfssatz 6 immer angewendet werden kann), wie bei der Konstruktion der Kette S (I), nur daß von einer Stelle $L \geqq 1$ an, zum erstenmal $H_1(\mathfrak{h}_L) = o$ sein, denn sonst wäre ja eine S (I) Kette vorhanden (nach links bricht sie natürlich nicht ab). Damit ist der Hilfssatz 8 bewiesen. Wir nehmen nun an, daß in $\mathfrak{H}$ weder eine S(I) noch eine S(II) Folge vorhanden ist. Dann muß es nach den Hilfssätzen 5 und 8 ein $\mathfrak{h}_0 \neq o$ in $\mathfrak{H}$ mit $H_2(\mathfrak{h}_0) = o$ geben.

Wir beginnen nun wie in Hilfssatz 5 und 8 die Kette S' zu konstruieren, aber nun stets mit $\mathfrak{h}_0{}^* = \mathfrak{h}_0$, so daß also (II) 4. ersetzt wird, durch

$$4'') \quad H_2(\mathfrak{h}_0) = 0. \tag{23}$$

Es ist natürlich $H_1(\mathfrak{h}_0) \neq o$. Ist nun bei der Konstruktion von $\mathfrak{H}'$ stets $H_1(\mathfrak{h}_j) \neq o$, so bricht die Kette S' nicht ab und wir können aus ihr eine Kette $S'''_M : \{\mathfrak{h}^*_{jM}\}$ bilden, welche (II) 1., 2., 3., 5., 6. und 4'') erfüllt für jedes $M > 1$ $(0 \leqq j < \infty)$ $(\mathfrak{h}_{0M}{}^* = \mathfrak{h}_0)$. Dies ist möglich, da ja beim Nachweis von 5. nur benützt wurde, daß $H_1(\mathfrak{h}_j{}^*) \neq 0$ für alle j ist. Nehmen wir an, daß es für eine unendliche Folge von M-Werten zugehörige S'''_M-Ketten gibt, dann können wir uns eine Kette S(III): $\{\mathfrak{h}_j\}$ $(0 \leqq j < \infty)$ bilden, welche (II) 1., 2., 3., 6., 4'' erfüllt.

Vom Hilfssatz 6 wird nur mehr die erste Hälfte verwendet, sonst wird so wie bei der Konstruktion von S (I) und S (II) vorgegangen. Es gibt nur endlich viele verschiedene $\mathfrak{h}_{1\,M}$ mit $H_1(\mathfrak{h}_{1M}) \leqq H_1(\mathfrak{h}_0) = K$, es gibt also eine unendliche Teilfolge $\{M_{i1}\}$ von M-Werten mit $\mathfrak{h}_{1M} = \mathfrak{h}_1$ usw.

Aus der Existenz von S(III) schließen wir wie bei S(I), daß

$$\lim_{j\to\infty} H_1(\mathfrak{h}_j) = 0, \quad \lim_{j\to\infty} H_2(\mathfrak{h}_j) = \infty \tag{24}$$

ist, denn es wurde dort nur benützt, daß für alle j, $H_1(\mathfrak{h}_j) \neq 0$.

Wir können nun genau wie bei S(I) vorgehen, nur ist $j = 0$ statt $j \to -\infty$ zu benützen, da ja $H_2(\mathfrak{h}_0) = 0$ ist. Damit ist auch in diesem Fall der Satz bewiesen.

Es kann daher angenommen werden, daß es in $\mathfrak{H}$ keine Ketten von der Gestalt S(I), S(II), S(III) gibt. Dann muß die Kette S' begonnen mit $\mathfrak{h}_0$, mit $H_2(\mathfrak{h}_0) = 0$ notwendigerweise abbrechen, denn sonst gäbe es in $\mathfrak{H}$ eine S(III)-Folge, d. h. es gibt eine endliche Folge $S = S$ (IV): $\{\mathfrak{h}_j\}$ $(0 \leqq j \leqq L)$, wo $L \geqq 1$, welche (II) 1., 2., 3., 6. erfüllt und

$$4'''\colon H_2(\mathfrak{h}_0) = 0 \qquad 5'''\colon H_1(\mathfrak{h}_L) = 0, \quad H_1(\mathfrak{h}_j) > 0 \quad (j < L)$$

ist. Hier geht man nun genau so vor, wie bei S(II) nur ist $j = 0$ statt $j \to -\infty$ und $j = L$ statt $j \to \infty$ zu verwenden. Für t_1 (vgl. (21) steht jetzt bei festem t_2 eine Menge mit inneren Punkten zur Verfügung, da ja S jetzt endlich ist.

Buchbesprechungen.

Constantin Carathéodory: Gesammelte Mathematische Schriften. Herausgegeben im Auftrag und mit Unterstützung der Bayrischen Akademie der Wissenschaften. Erster Band: Mit einem Titelbild und 48 Textabb., XII, 426 S. München: C. H. Becksche Verlagsbuchhandlung. 1954. DM 42.—.

Bereits zu Lebzeiten *Carathéodorys* und unter seiner Leitung wurde die Herausgabe seiner gesammelten Abhandlungen geplant und der Druck begonnen, nach seinem Tod übernahm eine Kommission der Bayrischen Akademie die Weiterführung des auf 5 Bände berechneten Werkes. Nunmehr liegt der erste Band vor, der — bis auf die dem zweiten Band vorbehaltenen Arbeiten geometrischen und historischen Charakters — die Abhandlungen über Variationsrechnung enthält. Unter den in drei Abteilungen: Diskontinuierliche Lösungen, Allgemeine Theorie, Mehrfache Integrale gegliederten Arbeiten befindet sich eine bisher unpublizierte, von der sich Korrekturfahnen im Nachlaß des Verf. fanden; sie liegt zeitlich vor dem Erscheinen der wichtigen Arbeit „Über die Einteilung der Variationsprobleme von *Lagrange* nach Klassen" (Comm. Math. Helv. *5*, 1933), auf deren Inhalt sie Bezug nimmt, und bringt unter Zugrundelegung der Theorie von *Hamilton-Jacobi* die Kennzeichnung der feldartigen (Mayerschen) Extremalenscharen durch das Verschwinden der Klammerausdrücke von *Lagrange* und anschließend Bemerkungen über die feldartigen Scharen beim akzessorischen Problem, die für die Theorie der zweiten Variation von Bedeutung sind. Dankenswerter Weise ist auch das von *Carathéodory* verfaßte Kapitel „Variationsrechnung" aus *Frank-Mises* „Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik" in den Abdruck einbezogen worden.

Der Text der Abhandlungen ist bis auf die in neugriechischer Sprache verfaßten (die in deutscher Übersetzung wiedergegeben sind) in der Originalsprache belassen worden und durch die Herausgeber sorgfältig revidiert, wovon die zahlreichen, sich auf die Verbesserung von Druckfehlern und anderen Versehen beziehenden Anmerkungen Zeugnis ablegen.

Möge das begonnene Werk ungestört seiner Vollendung entgegengehen, die im Interesse aller Mathematiker liegt; gehört doch das Lebenswerk *Carathéodorys'* zu den wesentlichen Zügen des Bildes unserer Wissenschaft in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts. Die Ausstattung, die der Verlag dem Werke zuteil werden ließ, ist des großen Meisters würdig.

J. Radon, Wien

Salvatore Pincherle: Opere scelte. Band I. 400 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1954. Lire 3500.—.

Wer an dem internationalen Mathematiker-Kongreß in Bologna teilnehmen konnte, erinnert sich noch an den hervorragenden Präsidenten dieses Kongresses, an Prof. *S. Pincherle*. Die Unione Matematica Italiana hat anläßlich des 100. Geburtstages von *S. Pincherle*, der bis zu seinem Ableben (1936) Präsident dieser Vereinigung war, beschlossen, aus der großen Menge der rund 250 Arbeiten, einen Teil in zwei Bänden herauszugeben. Mit der gewiß nicht leichten Auswahl sind die Professoren *U. Amaldi*, *G. Belardinelli*, *S. Cinquini*, *D. Graffi*, *A. Mambriani* und *B. Segre* betraut. Der erste Band enthält den Nachruf auf *S. Pincherle*,

den *U. Amaldi* in der Accademia Nazionale dei Lincei gehalten hat; ferner ein Verzeichnis der sämtlichen Arbeiten und 15 Abhandlungen, die größtenteils der Funktionalanalysis angehören.

N. Hofreiter, Wien

Die Unsachlichkeit der Existenzphilosophie. Vier kritische Aufsätze. Von *K. Reidemeister*. IV, 40 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 4.80.

R. will die Existenzphilosophie (EPH) ins Gespräch bringen mit dem Positivismus (POS), „der durch seine pure Existenz die Existenzphilosophie vor die Wahl stellt, den Anspruch auf Erkenntnis a priori, mit dem sie beginnt, einer sachlichen Prüfung zu unterziehen oder sich zur Unsachlichkeit dieses Anspruches zu bekennen" (17). Der EPH wird das Verdienst zugebilligt, daß sie „die Frage nach dem Wesen, nach dem Wesentlichen und Eigentlichen im allgemeinen Raum der Wissenschaft mit einer Entschiedenheit und Dringlichkeit lebendig erhält, die sachgerecht ist..." (18). Nur der Weg, den sie dabei einschlägt, „der Sprung in die Ursprünglichkeit" (10, 25, 34) in dem sie „das Wesentliche und Eigentliche" erreichen will, entzieht sich der kritischen Prüfung und ist daher ein unsachliches Beginnen. „Der Anspruch der Ursprünglichkeit überspringt das kritische Thema" (17). Dem POS wird vorgehalten, daß er die Wesensfrage als sinnlose Frage ausschaltet. *R.* gibt den Grund an, warum der POS den Sinn dieser Frage nicht verstehen kann. Er hat einen zu engen Sinnbegriff, da er das Verstehen „auf im strengen Sinne exaktes, im System des Aufweisbaren zu vollziehendes Verstehen einschränkt" (23). Das hat aber nach *R.* die bedauerliche Folge, „daß dabei das hermeneutische Verstehen ganz außer Betracht gelassen wird, was im Felde der exakten Untersuchungen nutzbringend, für die *Einheit des Ganzen* aber schädlich ist" (23). Schon im ersten der vier kritischen Essays (1—10), aus denen das vorliegende Buch besteht, wird die zentrale Stellung der hermeneutischen Frage an einem theologischen Beispiel (Bultmanns Entmythologisierung) verdeutlicht. Es handelt sich dabei um die Frage der durch sinndeutende Auslegung (Interpretation), aus dem *Zusammenhang des Ganzen*, zu gewinnenden Sinngehalte von Aussagen. Erwächst dieses Verfahren auch ursprünglich aus der Philologie, so hat es doch in allen Wissenschaften, die sich sprachlich ausdrücken müssen, seine Parallelen. Zugleich wird aber das existentielle Verstehen abgelehnt, da seine Grenze darin liege, „daß Existentielles undurchschaubar ist" (9). So wird deutlich, daß *R.* für eine rationale, sachliche Form hermeneutischen Verstehens eintritt, für ein Verstehen, das seinen Inhalt nicht auf Grund gleichgearteten Erlebens gewinnt, sondern auf Grund identischer Sachverhalte durch Erfassung objektiver Bedeutungen ermittelt. So hofft er den Gegensatz von Verstehen und Erkennen, von positivem (exaktem) und hermeneutischem (deutendem, auslegendem) Denken, „die unerträgliche Zerrissenheit in die zwei Weisen des Denkens" (29), die sich in Natur und Geisteswissenschaften gegensätzlich entfalten, zu überwinden. „Und sollte es, wenigstens im Bezirk der Wissenschaft nicht möglich sein zu einem Ausgleich beider Arten von Verstehen zu gelangen?" (24). Dieser Zielsetzung zu entsprechen, hätte *R.* allerdings den Sinn der hermeneutischen Frage und die hermeneutische Methode in ihrer Struktur erst darlegen müssen. Davon ist wenig geschehen. Es hätten sich dann allerdings verwickelte logische und erkenntnistheoretische Fragen ergeben, auf die *R.* nicht eingeht. Doch bleibt bestehen, daß *R.* dem POS mit der Wesensfrage und der EPH mit der „Vernunftidee der Sachlichkeit, die sich in der Wissenschaft bewährt..." (16) erkenntniskritisch auf den Zahn fühlt. Er ist sich klar darüber,

daß von beiden Seiten das Verhältnis von Philosophie und Wissenschaft in Frage gestellt wird, vom POS, der die Philosophie mittels der Wissenschaft und von der EPH, die die Wissenschaft mittels der Philosophie eliminiert. Das dialektische Verhältnis von Philosophie und Wissenschaft in einer neuen kritischen Synthese versöhnlich zu gestalten, ist nach *R.* „eine klar umrissene Aufgabe (29), der sich heute niemand entziehen kann" (21). Doch kann diese Aufgabe u. E. nur auf breitester Basis durch eine überdialektische „integrale Logik" gelöst werden. *R.* versucht es von der Ontologie aus, von einer „kritischen Ontologie der Wirklichkeit", (vgl. *R.*'s Buch „Geist und Wirklichkeit", Heidelberg 1953), die eine sachliche Wesensaussage durchaus ermöglicht. Es verlohnt sich, auf diesen ontologischen Einsatz näher einzugehen. Zunächst ist bemerkenswert, daß auch *R.*, dieser exakte mathematische Denker von Rang, eine (allerdings kritisch-empirisch fundierte) Ontologie heute schon für unumgänglich erachtet. Es hat überhaupt den Anschein, daß wir gerade von der Mathematik und Physik her neue ontologische Versuche und Ansätze zu erwarten haben. Das ist in der Tat eine Änderung der Situation, die eine künftige fruchtbare Entwicklung ontologischen Denkens verheißt. *R.* fordert „die Möglichkeit der Wesenserkenntnis a priori kritisch zu untersuchen" (29). Die Ausschließung der Wesensfrage durch den POS könne behoben werden „sobald die Wesenserkenntnis in kritischer Selbstprüfung dem Positivismus im Felde kritischer Vernunft begegnet" (29). So handelt es sich um die kritische Überwindung der rein phänomenologischen Ontologie. *R.* fordert, daß „auch das Gelichtete als aufweisbar gedacht werden dürfe" (31). Dabei will *R.* das „Aufweisbare" über den phänomenal empirischen Bereich des Anschaulichen hinaus auf das grundsätzlich Unanschauliche ausgedehnt wissen (einer Tendenz der neuen theoretischen Physik folgend). Es lassen sich „am Anschaulichen Beziehungen aufweisen, die selbst nicht anschaulich sind ... weil es wirkliche Eigenschaften der Dinge gibt, die sich der Wahrnehmung und damit der Anschauung entziehen" (31). Diese an sich grundsätzlich unanschaulichen und in diesem Sinne übersinnlichen Beziehungen konstituieren den „Wirkungszusammenhang" zwischen den wahrnehmbaren Eigenschaften eines Dinges, „der selbst nicht wahrnehmbar ist, sondern nur als Beziehung von Wahrnehmbaren aufweisbar ist" (31). In solcher, den Bezirk des Anschaulichen transzendierenden Aufweisbarkeit (kritisch-empirisch gesichert), bilden diese Beziehungen im ganzen den ontologischen Bereich der Wirklichkeit. Die empirische Fundierung dieses Bereiches ist dadurch gewährleistet, „daß auch unmittelbare Erfahrung sich vorzüglich auf Wirkungszusammenhänge stützt, die nicht anschaulich sind" (31). Daher, so folgert *R.* gegen die phänomenologische Ontologie: „Das sich lichtende Sein gründet in der Vergessenheit des *Wirklichen*, das sich im *Sein* verbirgt" (32). Wie wird es dann daraus *offenbar?* Durch die Erfahrung. Das soll nicht heißen, daß die Dinge und Vorgänge der Welt erst durch die Erfahrung wirklich werden. Dann wäre das Wirkliche im cogito der Erfahrung also im Bewußtsein „verborgen", und nicht im Sein. Doch meint *R.* offenbar das Gegenteil. Darum kann nach ihm Erfahrung nur so begriffen werden, daß sich darin etwas zu erkennen *gibt*, das unabhängig von der Erfahrung wirklich *ist*: also ein *im Sein* und nicht erst durch das Bewußtsein *Gegebenes*. Und darauf zielt auch die EPH, das meint auch ihr „Sprung in die Ursprünglichkeit", der *rein ontologisch* zu verstehen ist und *nicht gnoseologisch* mißverstanden werden darf. Auch *R.* ist es mit seinem „Wirkungszusammenhang", um einen ontologischen Ansatz zu tun. Wer aber „Wirkungszusammenhang" sagt, muß wieder die möglichen Strukturen dieses Zusammenhangs differenzieren. Vor allem die zwei gegensätzlichen: Die formale Struktur rein positiv festzustellender gesetzmäßiger Beziehungen zwischen wahrnehmbaren Erscheinungen der *Natur* und

die inhaltliche und darum zuletzt nur intuitiv zu verstehende Sinnstruktur ideeller Verwirklichung in den geistigen Schöpfungen, die der *Geschichte* angehören. Zwischen Wirkung und Wirkung bestehen strukturelle Unterschiede im objektiv Gewirkten, die entsprechend unterschiedene Methoden der Analyse erfordern. Mit dem Terminus „Wirkungszusammenhang" (siehe *Dilthey*) ist also noch keine Lösung der hermeneutischen Frage im Sinne der von *R.* angestrebten „Einheit des Denkens in Philosophie und Wissenschaft" (18), sowie der Überwindung der „Zerrissenheit des wissenschaftlichen Denkens" (29) der „Zerspaltung von Denken und Verstehen" (32), zwischen Natur- und Geisteswissenschaften gegeben. Die entscheidende Frage ist hier, ob auch Natur als Ganzes gesehen, ein *Sinngebilde* darstellt und nicht bloß einen Faktizitätszusammenhang von gesetzmäßigen Beziehungen, ob wir auch den Kosmos als Logos auffassen dürfen, als ein Ganzes, aus dem sich die Mannigfaltigkeit der gesetzmäßigen Beziehungen zu einem Weltbild vereinigt, darin ein umfassender Sinn zum Ausdruck kommt. Nur unter dieser Voraussetzung kann es ein hermeneutisches Naturverständnis geben. Es geht um „das Licht des Seins", das auch die naturwissenschaftliche Natur untergründig (und damit positivistisch unbeachtet) sinnhaft erhellt und jeweils in die naturwissenschaftlichen Theoriebildungen implizit (gleichsam unbewußt) aufgenommen und darin wirksam ist, ohne daß es notwendig, ja auch nur möglich wäre, diesen Sinngrund des Ganzen mit den Mitteln und Methoden der naturwissenschaftlichen Spezialforschung explizit ausdrücken und formulieren zu können. Dazu ist die Philosophie da, die als Naturphilosophie nicht einfach identisch ist mit Naturwissenschaft (mit dieser Identität wäre weder der Naturwissenschaft, noch der Philosophie gedient). Es ist schon so, wie *M. Schlick* sagt: „In der naturwissenschaftlichen Erkenntnis, ist in der Tiefe Philosophie verborgen, als deren wahre Seele". Es ist aber durchaus auf die tiefere Dimension der Philosophie zu achten und darum gar nicht möglich, daß Naturwissenschaft in Philosophie oder Philosophie in Naturwissenschaft übergeführt werde. Vielmehr müssen beide ihre Eigenständigkeit wahren, um Partner eines fruchtbaren Gespräches sein zu können. Und daran ist auch *R.* gelegen, der oft genug den klassischen Logos anspricht — vom Studium der Antike angeregt („das exakte Denken der Griechen", Hamburg 1949) und somit das aus dem Sinn des Ganzen erst mögliche Seinsverständnis als „hermeneutisches Verstehen" auch für den Kosmos in Anspruch nimmt. Auf den kosmischen Logos kommt es in der Tat wieder in der Naturphilosophie an, die heute in der Situation der Naturwissenschaft als große Kosmologie vorerst noch ein Desiderat ist. *L. Gabriel*, Wien

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. Von *G. Kowalewski* †. Vierte Auflage. 348 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1954. DM 30.—.

In diesem Lehrbuch wird die Determinantentheorie in breiter und ausführlicher Weise dargestellt. Die Überlegungen sind rein arithmetisch und frei von Vektoren. Das Buch enthält viele Sätze, die in anderen Lehrbüchern fehlen. Die letzten beiden Kapitel handeln von linearen Integralgleichungen und von der Elementarteilertheorie. Gegenüber der dritten Auflage (Besprechung in Monatsh. Math. *51*, 16, (1944) enthält die vierte Auflage kleine Änderungen und Ergänzungen. *N. Hofreiter*, Wien

Die Fibonaccischen Zahlen. Von *N. N. Worobjow*. 48 S. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1954.

Das kleine Buch ist eine Übersetzung des im Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur Moskau-Leningrad 1951 erschienenen Buches. Fibonaccische Zahlen können bekanntlich rekursiv durch die Formel $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ mit $u_1 = u_2 = 1$ definiert werden. Sie besitzen eine Reihe von einfachen, meist zahlentheoretischen Eigenschaften. Davon werden hier einige ausführlich entwickelt, und zwar solche, die Aussagen über die Teilbarkeit machen oder mit Kettenbrüchen in Beziehung stehen. Die Darstellung ist sehr breit und leicht verständlich. Alle erforderlichen zahlentheoretischen Hilfsmittel werden bereit gestellt. In den Schlußbemerkungen wird auf schwierigere Fragen über Fibonaccische Zahlen hingewiesen und das noch ungelöste Problem erwähnt, ob es unter den Fibonaccischen Zahlen endlich oder unendlich viele Primzahlen gibt.

N. Hofreiter, Wien

Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen. Von *P. Turán*. 196 S. Budapest: Akademiai Kiado. 1953.

H. Bohr hat als erster die Theorie der diophantischen Approximationen systematisch auf die Lösung funktionentheoretischer Probleme angewandt. Er bemerkte die Äquivalenz gewisser Fragen der Theorie der diophantischen Approximationen und gewissen Abschätzungen trigonometrischer Ausdrücke. Diese Idee wird hier zugrundegelegt und in erweiterter Form ausführlich dargestellt. Durch die allgemeinere Fassung wird der Bereich der Anwendungsmöglichkeiten wesentlich erweitert. Man erkennt, in wie mannigfachen Formen das Grundprinzip zur Geltung kommt. Durch die systematische Darstellung konnten bisherige Ergebnisse, von denen viele dem Verfasser zu danken sind, einheitlich dargestellt und viele Beweise vereinfacht werden. Auch neue Ergebnisse wurden erzielt. Das Buch beginnt mit Approximationssätzen von *Kronecker* und *Dirichlet* und bringt hierfür analytische Formulierungen. Es zeigt sich, daß sich viele Probleme der diophantischen Approximationen auf Fragen über trigonometrische Ausdrücke oder auf Summen von Exponentialfunktionen zurückführen lassen. Im Buch spielen Abschätzungen folgender Art eine zentrale Rolle: Sind z_1 und z_2 beliebige komplexe Zahlen $(j = 1, \ldots, k)$, $M_1(t) = \min |z_j t|$, $M_2(t) = \max |z_j t|$, $H(t) = |a_1 z_1^t + \ldots + a_k z_k^t|$, so sollen t-Werte ermittelt werden, für welche $H(t) > M_1(t)$, bzw. $H(t) < M_2(t)$ über einer nicht zu kleinen von den z_j unabhängigen Schranke bleiben. Bei den im Buch gegebenen Formeln ist die Lokalisation der t-Werte sehr gut. Die wichtigsten Sätze sind Satz VII (S. 38) und Satz IX (S. 46): Zu jedem $m > 0$ gibt es ein ganzes t mit $m \leqq t \leqq m + k$, so daß $H(t) > C_1 M_1(t)$ bzw. $H(t) < C_2 M_2(t)$. Dabei sind C_1 und C_2 gewisse genügend große Konstante. Besonders ausführlich wird der Spezialfall $a_1 = \ldots = a_k = 1$ behandelt. Die Anwendungen dieser Approximationssätze nehmen zwei Drittel des Buches ein. Es sind Verallgemeinerungen der Sätze von *Littlewood* und *Bernstein*. Anwendungen auf Dirichletsche Reihen mit Lücken, auf die Theorie der quasianalytischen Funktionen, die Theorie der Differentialgleichungen, die angenäherte Lösung algebraischer Gleichungen. Abschätzungen des Restgliedes im Primzahlsatz. Die tiefsten und schönsten Sätze ergeben sich bei der Anwendung auf die Riemannsche Zetafunktion. Es werden gute Abschätzungen der Nullstellenanzahl und neue Äquivalenzsätze für die Riemannsche Vermutung gegeben. Der Verfasser weist auf viele offene Fragen und weitere Anwendungsmöglichkeiten hin. Er hofft, daß zahlreiche Resultate des Buches bald überholt sein mögen.

N. Hofreiter, Wien

Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Von *R. Rothe*. Herausgegeben von *W. Schmeidler*. Teil V: Formelsammlung. Dritte Auflage. Mit 74 Textabb., 124 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1954. DM 4.80.

Die neue Auflage enthält gegenüber der zweiten Auflage (siehe die Besprechung in Monatsh. Math. *55*, 97—98 (1951)) mehrere kleine Änderungen, die durch die Neuauflagen der Bände I, II, III veranlaßt wurden. Das Buch ist eine zuverlässige Sammlung von Formeln und Lehrsätzen, die sich zum Nachschlagen bestens eignet.

N. Hofreiter, Wien

Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse. Von *A. Denjoy*. VI, 236 S. Paris: Gauthier-Villars. 1954. ffr. 2700.—.

Die grundlegenden Arbeiten des berühmten Verfassers über die Derivierten der stetigen Funktionen und die Totalisation (Integral von Denjoy): Journ. de Math. (7. ser., Bd. I, S. 105—240), Bull. Soc. Math. France (XLIII, S. 161–248), Ann. Ec. Norm. (3. ser., Bd. XXXIII, S. 127—236) sind in diesem Band in photomechanischer Reproduktion vereinigt.

Von vornherein als ein einheitliches Ganzes konzipiert, stellen diese in den Jahren 1915—1917 erschienenen Arbeiten auch heute noch eine ausgezeichnete Einführung in ein Teilgebiet der reellen Funktionentheorie dar, dessen Wichtigkeit allein aus der Tatsache erhellt, daß es die für stetige Ableitungen von der klassischen Integralrechnung gelöste Frage nach den Stammfunktionen auf beliebige Derivierte ausdehnt und beantwortet.

J. Radon, Wien

Higher Transcendental Functions. Teilweise nach hinterlassenen Aufzeichnungen von *H. Bateman* herausgegeben vom „Staff of the Bateman Manuscript Project". Band 1: XXVI, 302 S. — Band 2: XXVII, 396 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company. 1953.

H. Bateman, von dem eines der besten Werke über die partiellen Differentialgleichungen der Physik verfaßt wurde (und eines der wenigen, die in mathematischer Hinsicht vollkommen einwandfrei sind), hatte schon längere Zeit vor seinem Tode (1946) geplant, ein umfassendes Werk über spezielle Funktionen herauszugeben, ein Gebiet, auf dem er eine der bedeutendsten Autoritäten unserer Zeit war. Nach seinem Tode wurde dieses Projekt von einer Arbeitsgemeinschaft verschiedener Forscher, der unter anderem *A. Erdély*, *W. Magnus*, *E. Oberhettinger*, *F. Tricomi* angehörten, zu Ende geführt.

Das Werk ist nicht eigentlich eine ausführliche Darstellung, aber auch keine reine Sammlung von Sätzen und Formeln, sondern es werden die Beweise jeweils kurz aber sehr verständlich skizziert. Es kann hier nur eine kurze schlagwortartige Übersicht über die in diesem groß angelegten Werk behandelten Funktionen gegeben werden. Von allen im folgenden angeführten Funktionen finden sich hier außer den verschiedenen Definitionen der entsprechenden Funktion Reihendarstellungen, mannigfaltige Integraldarstellungen, Rekursionsformeln nach verschiedenen Parametern, spezielle Werte der Funktionen, asymptotische Entwicklungen für verschiedene Bereiche der Variablen und Parameter, Differential- und Integralgleichungen, die von den Funktionen erfüllt werden, Transformationsformeln oft kompliziertester Art, Untersuchungen über das funktionentheoretische Verhalten der einzelnen Funktionen (Nullstellen, Singularitäten usw.), sowie ausgedehnte Hinweise auf Lehrbücher, Originalarbeiten und Tafelwerke, u. a. m. Berücksichtigt wurden: Gammafunktion, Betafunktion, Psi-Funktion, die verallgemeinerte Zeta-Funktion und eine noch allgemeinere von *Lerch* betrachtete

Funktion, Euler'scher Dilogarithmus, Bernoulli'sche und Euler'sche Polynome, Mellin-Barnes'sche Integrale, hypergeometrische Funktion, Legendre'sche Funktion erster und zweiter Art, Gegenbauer'sche Funktionen, die verschiedensten Verallgemeinerungen der hypergeometrischen Funktionen, hypergeometrische Funktionen von mehreren Veränderlichen, konfluente hypergeometrische Funktion. Im zweiten Band werden behandelt: Besselfunktionen, Funktionen des parabolischen Zylinders und des Rotationsparaboloides, unvollständige Gammafunktion, Sinus integralis, orthogonale Polynome (hier außer den üblichen z. B. auch die von *Krawtchouk* und *Charlier*), Kugelfunktionen, Orthogonale Polynome in mehreren Veränderlichen, Elliptische Funktionen und Thetafunktionen.

Schon aus dieser kurzen und unvollständigen Stoffangabe kann man vielleicht ersehen, mit welcher Sorgfalt man sich bemüht hat, das Werk möglichst vollständig auszustatten. Dabei sind nicht etwa nur Dinge berücksichtigt worden, die für Anwendungen wichtig sind, sondern alles was man heute über diese Funktionen weiß. Z. B. finden sich bei den Besselfunktionen auch die Siegel'schen Transzendenzuntersuchungen zitiert.

Dieses monumentale Werk wird in keiner mathematischen, physikalischen oder technischen Bibliothek fehlen dürfen. *K. Prachar*, Wien

Positive Lösungen einer nichtlinearen Integralgleichung. Von *U. Pirl.* (Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig; Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: Band 100, Heft 8.) 44 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1953. DM 4.—.

W. Schmeidler hat in seiner Arbeit „Algebraische Integralgleichungen", Math. Nachr. *8*, 31—40 (1952) eine in den Anwendungen oft auftretende Klasse von Integralgleichungen untersucht und ein Iterationsverfahren entwickelt, das die Annäherung an positive Lösungen ermöglicht. Hier wird eine nichtlineare Integralgleichung betrachtet, die teilweise spezieller, teilweise allgemeiner ist (da die Operatoren unendliche Reihen darstellen), als die von *Schmeidler* studierten Integralgleichungen, und es werden die positiven Lösungen durch Interationsverfahren von oben und unten approximiert. *N. Hofreiter*, Wien

Über das Verhalten der Integrale homogener und inhomogener Summengleichungen im Unendlichen. Von *I. Paasche.* V, 59 S. München-Düsseldorf: R. Oldenbourg. 1954. DM 5.90.

Dies ist eine Untersuchung des Verhaltens der Lösungen von gewissen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten (Summengleichungen), die besonders von *Perron* (z. B. Math. Zeitschr. *8* (1920) 159—170) betrachtet wurden. Es wird auch eine ausführliche historische Einleitung gegeben.

K. Prachar, Wien

Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum. Von *W. Schmeidler.* (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 46.) VI, 89 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1954. DM 7.80.

Es ist erstaunlich, wie reichhaltig das Büchlein trotz seines beschränkten Umfanges ist. Trotzdem braucht der Leser keinerlei einschlägige Vorkenntnisse mitzubringen. Er erfährt zunächst die Grundtatsachen über den Hilbertschen Raum und über Orthogonalsysteme und wird dann in die Theorie der linearen

und beschränkten Operatoren eingeführt. Zunächst stehen die vollstetigen Operatoren im Vordergrund. Hervorhebenswert ist die eigenständige Darbietung der Fredholmschen Sätze für die Operatorengleichung zweiter Art. Im letzten Abschnitt, welcher der Spektraltheorie allgemeiner linearer Operatoren gewidmet ist, greift der Autor über die Spektraldarstellung der beschränkten Hermiteschen und normalen Operatoren hinaus zur Spektraldarstellung nicht- und halbbeschränkter Operatoren. Eine Reihe von Übungsaufgaben und Ergänzungen, die meist konkrete Anwendungen der Theorie betreffen, sind jedem der drei Abschnitte beigegeben. Sie vermitteln dem Leser ein Bild von der vielseitigen Bedeutung der Theorie für mathematische und physikalische Fragen. Der aufmerksame Benützer des Buches erwirbt ein fundiertes Wissen und kann sich nun getrost an umfangreichere Gesamtdarstellungen der Theorie heranwagen.

L. Schmetterer, Wien

Linear Operators. Spectral Theory and some other Applications. Von *R. G. Cooke*. XII, 454 S. London: Macmillan and Co., Limited. 1953. Geb. 52 s. 6 d. net.

Der durch sein Werk „Infinite Matrices and Sequence Spaces" bekannte Verfasser hat hier den Versuch unternommen, die Theorie der linearen Operatoren vom Standpunkt der neuesten Entwicklung aus darzustellen. Die neueren Arbeiten auf diesem Gebiete sind oft sehr zerstreut und bedienen sich manchmal auch abweichender Terminologien, so daß das Unternehmen des Verfassers als sehr verdienstvoll betrachtet werden muß.

Das Buch beginnt mit einer Einführung in den Hilbert'schen Raum, und zwar wird sowohl die Realisierung im Raum der in einem Gebiete des R_n L^2-integrierbaren Funktionen, als auch der Begriff des abstrakten Hilbert'schen Raumes behandelt. Das zweite Kapitel, das einzige „nichtmathematische" Kapitel soll eine Einführung in die Anwendungen der Theorie in der Quantenmechanik und in der Wellenmechanik geben. So wird z. B. die Störungsrechnung beim harmonischen Oszillator behandelt. Weiter wird kurz auf die Probleme eingegangen, die zur Einführung der Dirac'schen „δ-Funktion" geführt haben. Hier finden sich auch als Beispiele verschiedene lineare Operatoren, deren „Wertvektoren" nicht notwendig aus L^2 sind. Kap. 3 ist mit „Lineare Operatoren im abstrakten Hilbert'schen Raum" überschrieben und bringt vor allem auch den Begriff hypermaximaler (selbstadjungierter) Operator. Die von *v. Neumann* entwickelte Spektraltheorie für solche Operatoren wird im 4. Kapitel besprochen. Sehr interessant und wertvoll ist das nächste Kapitel, in dem verschiedene Ideen zusammengestellt und verglichen werden, die zu Neubeweisen des v. Neumann-schen Hauptsatzes über die Spektralzerlegung für hypermaximale Operatoren geführt haben. Vor allem werden Beweise von *Lengyel*, dem Verfasser, *Riesz* und *Lorch* behandelt, sowie Ideen von *Stone*, *Koopman* und *Doob*, *Wintner* u. a. ausführlich erklärt. Hier findet sich auch der schöne Satz von *Bochner* über positiv definite Funktionen. Kap 6 ist überschrieben mit „Projektive Konvergenz und Limes in Matrix-Räumen und -Ringen" und es werden hier Räume betrachtet, die über den Hilbert'schen Raum weit hinausgehen. Solche Räume wurden von *Köthe*, *Töplitz*, *Weber*, *Allen*, *Perron*, *Cooke* u. a. untersucht und sind hier in einem Buch zum ersten Mal behandelt. Das Werk schließt mit einem Kapitel über Banach'sche Algebren mit Anwendungen, vor allem auf den Wiener'schen Satz von der Abgeschlossenheit eines Funktionensystems, das aus einer Funktion aus L durch Translationen hervorgeht. Übrigens finden sich hier auch bisher weniger zugängliche Resultate von *I. M. Gelfand*. Nicht zuletzt macht dieses letzte Kapitel, in dem algebraische und analytische Methoden

wirkungsvoll zusammenarbeiten, das vorliegende Buch besonders wertvoll und es wird jeder interessierte Mathematiker und Physiker gerne zu diesem Werk greifen, das ihm den Zugang zu den neuesten Ergebnissen der Theorie der linearen Operatoren vermittelt. *K. Prachar*, Wien

Linear Equations in Applied Mechanics. Von *H. F. P. Purday*. Mit Textabb., XIV, 240 S. Edinburgh und London: Oliver and Boyd. — New York: Interscience Publishers, Inc. 1954. Geb. 20 s. net.

Das Buch will die mathematischen Hilfsmittel bringen, die man braucht, um Arbeiten aus angewandter Mechanik zu verstehen. So wird folgendes gebracht: Systeme von linearen Gleichungen, Determinanten, Matrizenrechnung, Differenzenrechnung, gewöhnliche lineare Differentialgleichungen, Vektor- und Tensorrechnung, lineare partielle Differentialgleichungen und lineare Integralgleichungen. Es werden also besonders die linearen Gleichungen gepflegt. Die Darstellung gewinnt durch die häufige Verwendung der Matrizen an Einfachheit. Einige Kapitel handeln von angewandter Mechanik und zeigen, wie man die in den andern Kapiteln entwickelten mathematischen Hilfsmittel anwendet. Es ist natürlich klar, daß die oben angegebenen mathematischen Diszipline nicht gründlich behandelt werden können. So werden z. B. die Regeln für die Determinanten zweiter Ordnung entwickelt und es wird erklärt, analoge Regeln gelten auch für Determinanten höherer Ordnung. Leser, die ein gründlicheres mathematisches Wissen erwerben wollen, werden auf Lehrbücher verwiesen. Das Buch ist also eine Einführung in die mathematischen Diszipline, die ein Physiker braucht; es ist eine erste Hilfe, die viele gut brauchen können. *N. Hofreiter*, Wien

Théorie de l'addition des variables aléatoires. Von *P. Lévy*. Zweite Auflage. Monographie des Probabilités: Band 1.) XX, 385 S. Paris: Gauthier-Villars. 1954.

Der Verf. hat die bewährte Anlage der ersten Auflage nicht geändert. Die originelle, vielfach von der Routinedarstellung abweichende Darbietung des Stoffes, die in weiten Teilen geistiges Eigentum des Autors ist, hat auch heute nichts von ihrer Bedeutung verloren. Reicht sie doch von den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie bis zur Theorie der Summen abhängiger Variabler und schließlich zur probabilistischen Deutung in der Theorie der Kettenbrüche. Neu hinzugekommen sind, abgesehen von einigen Bemerkungen (welche z. B. die charakteristischen Funktionen, Hinweise auf die Arbeiten von *Felle* über das Gesetz vom iterierten Logarithmus, von *Lòeve* über Grenzverteilungen und von *Ryll-Nardzewski* und *Hartmann* im letzten Kapitel betreffen) zwei Anhänge. Der erste ist ein Abdruck einer Arbeit des Autors aus dem Bulletin des Sciences mathémat. (1953), welche das schwache und starke Gesetz der großen Zahlen zum Gegenstand hat, der zweite betrifft eine Auseinandersetzung mit der Auffassung, die *Doob* in seinem kürzlich erschienenen Werk über stochastische Prozesse vertreten hat, mit den Konzepten des Autors. Die Neuherausgabe dieses Buches ist ein neuer Beweis für die hervorragende Rolle, welche der französischen wahrscheinlichkeitstheoretischen Schule zukommt.

L. Schmetterer, Wien

Introduction à la méthode statistique. Von *A. Monjallon*. 278 S. Paris: Librairie Vuibert. 1954. ffr. 2000.—.

Das Buch stellt eine elementare Einführung in die Grundzüge der Statistik dar. Es setzt vom Leser keinerlei mathematische Vorkenntnisse voraus. So wird z. B. der Gebrauch des Summenzeichens erklärt und in einem Anhang das Rechnen mit Potenzen, der Funktionsbegriff, die Ableitung usw. erläutert. Dank der zahlreichen Beispiele und der ausführlichen Erklärungen ist das Buch gut geeignet, dem Nichtmathematiker die einfacheren Tatsachen und Anwendungen der Statistik beizubringen. Sie reichen bis zu den geläufigen Prüfverfahren der normalen Stichprobentheorie, soferne sie auf der t- oder Chiquadrat-Verteilung beruhen.

L. Schmetterer, Wien

Rechentafeln. Von *A. C. Crelle*. VII, 252 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1954. DM 48.—.

Wie im Untertitel steht, ersparen diese Tafeln alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend. Sie erleichtern die Rechnungen bei größeren Zahlen und geben größere Sicherheit beim Rechnen. Die Tafeln enthalten die Produkte aller zwei Zahlen von 1 bis 1000. Die Anordnung der Tafeln ist sehr übersichtlich gestaltet. Der Druck ist sehr klar. Auf den letzten zwei Seiten sind Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1 bis 1000. Die Tafeln sind für numerische Rechner ein wichtiger und zuverlässiger Behelf.

N. Hofreiter, Wien

Analytische Geometrie. Von *W. Blaschke*. Zweite Auflage. (Mathematische Reihe: Band 16.) Mit 67 Textabb., 190 S. sfr. 19.60, DM 19.60. — **Projektive Geometrie.** Von *W. Blaschke*. Dritte Auflage. (Mathematische Reihe: Band 17.) Mit 71 Textabb., 197 S. sfr. 19.60, DM 19.60. Basel-Stuttgart: Verlag Birkhäuser. 1953.

Die beiden ausgezeichneten Lehrbücher des hervorragenden Geometers wurden 1947 bzw. 1948 von der Wolfenbütteler Verlagsanstalt K. G. (Wolfenbüttel und Hannover) nachkriegsbedingt nur in bescheidener Form und Ausstattung herausgebracht. Beide Bände wurden in dieser Zeitschrift Bd. *52* (1948), S. 262 bzw. S. 355 ausführlich und von berufenster Seite besprochen. Der Verlag Birkhäuser hat es nun unternommen, diese Lehrbücher in seiner bekannt gediegenen Ausführung neu aufzulegen. Auf diese Weise wird dieses einmalige, so ungemein reichhaltige Werk weitesten Kreisen wieder zugänglich gemacht, und zwar in einer äußeren Form, die des Verfassers, wie seiner von wahrhaft geometrischem Geist erfüllten Darstellung würdig erscheint. Die beiden vorliegenden Bände unterscheiden sich nur durch geringfügige Änderungen und Verbesserungen inhaltlich von den Wolfenbütteler Auflagen, lediglich bei der „projektiven Geometrie" wurde am Ende ein Abschnitt über „Waben und Geometrie" hinzugefügt, der in Anlehnung an einen Vortrag des Verf. an der Universität Catania (1951) entstanden ist. In geometrisch-axiomatischer Weise wird hier der Gruppenbegriff durchleuchtet, ein Einblick in die Geometrie der „Gewebe" gegeben und durch Gegenüberstellung von projektiver Geometrie und Wabengeometrie auf die gemeinsame Grundlegung und Herleitung beider hingewiesen.

H. R. Müller, Graz

Geometrie im Raum von vier Dimensionen. Von *L. Baumgartner*. Mit 58 Textabb., 112 S. München-Düsseldorf: R. Oldenbourg. 1954. DM 6.20.

Verf. gibt eine breit gehaltene Einführung in die Geometrie des reellen vierdimensionalen Raumes und benützt hiezu anschauliche synthetische Methoden, vielfach auch nur Analogieschlüsse (zu Räumen niedrigerer Dimension).

Da axiomatische Begründung, wie der Gebrauch von Begriffen der Linearalgebra (Rang, lineare Abhängigkeit usf.) vermieden werden, kann keine große Strenge erreicht werden; vielfach werden auch etwas gewagte Bezeichnungen und Begriffe angewandt (wie z. B. „unendlich dünn" auf Seite 5). Das Ziel des Verf. dürfte es aber auch sein, dem Anfänger in möglichst leicht verständlicher und anschaulicher Weise den Zugang zu geometrischen Zusammenhängen höher dimensionaler Räume zu öffnen, was gewiß gut erreicht wurde und dem sauber und mit zahlreichen Zeichnungen ausgestatteten Büchlein viele Leser sichern wird, zumal zahlreiche Beispiele und Aufgaben das Einarbeiten erleichtern.

Die Beschränkung auf euklidische Räume wird nur manchmal durch Gebrauch projektiver Begriffe durchbrochen. Im Vordergrund stehen lineare Gebilde, ihre Lagebeziehungen, ihr Parallelismus und ihre Normalität. Einen großen Raum nehmen die Betrachtungen über Polytope, deren Einteilung, sowie deren Inhalts- und Oberflächenberechnungen ein. Der *Euler*'sche Polyedersatz wird auf konvexe Polytope durch Induktionsschluß ausgedehnt. Zum Schluß werden regelmäßige Polytope behandelt und kurz auf nicht lineare Räume eingegangen: Hiebei beschränkt sich Verf. auf Hyperkugeln und berechnet deren Inhalt und Oberfläche.

H. R. Müller, Graz

Coordinates in Geometry. Von *H. G. Forder*. (Mathematical Series: Nr. 1.) Auckland Univ. College, Bull. Nr. 41. 30 S. 1953.

Der bekannte Neuseeländische Geometer bringt im knappen Rahmen eines Heftchens von rund 30 Seiten eine sehr allgemein gehaltene Begründung des Koordinatenbegriffs. Bereits *v. Staudt* zeigte, wie man Koordinaten in die Geometrie einführen kann, ohne die Begriffe „Abstand" und „Kongruenz" zu benützen. *Hilbert* kehrte in seinen „Grundlagen der Geometrie" die Rolle der Sätze von *Desargues* und *Pappus* hervor, während *R. Moufang* in zahlreichen Arbeiten untersuchte, welche Folgerungen sich aus der Annahme von Sonderfällen des *Desargues*'schen Satzes ergeben. — In eleganter Zusammenfassung und Vereinfachung dessen nimmt nun der Verf. im ersten Kapitel die Einführung von Koordinaten in die projektive Geometrie vor. Hiebei wird größte Allgemeinheit gewahrt und gelten die Überlegungen z. B. auch für finite Geometrien oder dgl. Im zweiten Kapitel wird dann die Erweiterung der projektiven Geometrie zu einer verallgemeinerten ebenen euklidischen Geometrie vorgenommen. Schließlich ist das dritte Kapitel der Trigonometrie in der hyperbolischen Ebene gewidmet. — Man kann dem Verf. für diese prägnante Zusammenfassung und Sichtung, vor allem aber für die klare, vereinfachte Darstellung sehr dankbar sein.

H. R. Müller, Graz

Darstellende Geometrie. Von *W. Haack*. I. (Sammlung Göschen: Nr. 142.) Mit 117 Textabb., 110 S. DM 2.40. — II. (Sammlung Göschen: Nr. 143.) Mit 86 Textabb., 129 S. DM 2.40. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1954.

Nach der mit zahlreichen historischen Hinweisen ausgestatteten Einleitung will der Verf. in den vorliegenden Bänden I und II „vornehmlich die Darstellungemethoden behandeln, die die Maße der dargestellten Körper wiedergeben, während im dritten Band die unmittelbare Anschaulichkeit der Zeichnung hervorgehoben wird". — Ohne irgendwelche Vorkenntnisse vorauszusetzen werden erst die verschiedenen Projektionsarten (Zentral-, Parallel- und Normalriß) kurz besprochen und dann ständig unter dem Gesichtspunkt der technischen Anwendungen das Grund- und Aufrißverfahren behandelt. Hierbei werden die

wichtigsten Lagen und Maßaufgaben (mit oder ohne Spurelemente) gelöst, ebenflächige Körper, d. h. Prismen und Pyramiden dargestellt, ihre Netze gezeichnet und ebene Schnitte, sowie Durchdringungen ausgeführt. Am Ende von Bd. I wird die (perspektive) Affinität besprochen, als Anwendung werden Eigenschaften der Ellipse aus solchen des Kreises gefolgert. Hierbei unterdrückt Verf., der praktischen Ausrichtung der Gesamtdarstellung folgend, den Beweis, daß das affine Bild eines Kreises tatsächlich eine Ellipse ist. — In Bd. II werden Körper mit krummen Begrenzungsflächen, sowie die kotierte Projektion behandelt. Drehkegel und -zylinder, sowie Kugeln werden in Grund und Aufriß dargestellt, ebene Schnitte und Durchdringungen an zahlreichen praktischen Beispielen vorgenommen. Hervorzuheben ist, daß der Kavalierperspektive (auch schon in Bd. I) ein breiter Raum zur Verfügung gestellt wird und zahlreiche Aufgaben auch in dieser Abbildungsart gelöst werden. Verf. empfiehlt sie zur Erzeugung anschaulicher Bilder. Dreh- und Schraubflächen werden, soweit technisch wichtig, gestreift. In der kotierten Projektion erfahren die wichtigsten theoretischen Grundaufgaben, sowie Anwendungen auf den Straßenbau ihre Behandlung. Auf topographische Flächen wird kurz eingegangen und eine Bestimmung des „ausgehobenen Volumens" gegeben.

Zahlreiche anschauliche Figuren, eine breite und klare Darstellungsweise, sowie das Fehlen höherer Gesichtspunkte und schwierigerer Überlegungen theoretischer Natur werden sicherlich dazu beitragen, daß die handlichen Bändchen unter Technikern weite Verbreitung finden. *H. R. Müller*, Graz

Grundzüge der Mechanik. Von *F. von Krbek*. 184 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G. 1954. DM 15.—.

Der Verfasser läßt seinem Buch über die Geschichte der Mathematik: Eingefangenes Unendlich, das im gleichen Verlag erschienen ist, eine Einführung in die Mechanik folgen. Genauer gesagt, sind es drei Einführungen, nämlich in die Newtonsche, die Einsteinsche und die Schrödingersche Mechanik, d. h. in die Wellenmechanik. Am ausführlichsten ist die klassische Mechanik dargestellt, nicht nur in begrifflicher, sondern auch in historischer Hinsicht. Die Ausführungen sind in vielfacher Hinsicht originell. Vielleicht wird man nicht immer der gleichen Ansicht wie der Verfasser sein, doch ist das Buch auf jeder Seite anregend und ideenreich. Stofflich wird auf verhältnismäßig kleinem Raum, sehr viel gebracht. Der Verfasser ist um mathematische Strenge bemüht. So wird, um nur ein Beispiel herauszugreifen, bei dem Begriff der Massendichte auf die additiven Mengenfunktionen eingegangen. (Der Name von *J. Radon* fehlt). Überhaupt werden viele mathematische Dinge gebracht oder wenigstens erwähnt, wie Kugelfunktionen, Tensorrechnung, Ergodentheorie, Theorie der Operatoren usw. (Ein Satz über die Gruppentheorie auf der Schlußseite des Buches ist etwas merkwürdig.)

Der historischen Entwicklung ist, wie schon erwähnt, großer Platz eingeräumt.

Das Buch ist sehr fesselnd geschrieben und wird sicher einen großen Leserkreis finden. *E. Hlawka*, Wien

Mécanique rationelle. Von *G. Bouligand*. XXXII, 572 S. Paris: Librairie Vuibert. 1954. ffr. 2400.—.

Zwei frühere Einzelwerke des Verf. (Précis de mécanique rationelle, Compléments et Exercices) sind in dem vorliegenden Band zu einem Lehrbuch verschmolzen, das speziell auf die Bedürfnisse der Studenten der Facultés des

Sciences ausgerichtet ist, aber von allen, die Probleme der analytischen Mechanik zu bearbeiten haben, mit großem Nutzen gelesen werden wird. Inhaltlich umfaßt es Vektorrechnung, Kinematik, Geometrie der Massen, Dynamik, insbesondere des starren Körpers, Stoß und Reibung, Mechanik der Fäden, Grundlagen der Elastizitätslehre und Hydromechanik, sowie eine Einleitung in die Relativitätstheorie, die bis zur Lösung des Zweikörperproblems nach *Schwarzschild* geführt wird. Das Programm ist also sehr ausgedehnt und wird durch zahlreich durchgeführte Aufgaben in wünschenswerter Weise ergänzt. So wird das gesamte 8. Kapitel nach einer eingehenden Anleitung zur Behandlung dynamischer Probleme ohne Reibung der Durchrechnung von Einzelaufgaben gewidmet, wobei stufenweise die Anzahl der Freiheitsgrade bis zu 5 ansteigt. Hierbei wird die Diskussion der erhaltenen Differentialgleichungen stets ohne Heranziehung höherer Funktionen durch elementare Methoden geleistet. Hingewiesen sei ferner auf das 9. Kapitel, das eine Einführung in die Theorie der Bahnkurven im Großen enthält. Die wesentliche Rolle der topologischen Eigenschaften des Konfigurationsraums wird dabei an den bekannten Ergebnissen von *Hadamard* über die geodätischen Linien auf hyperbolischen Flächen erläutert.

Zur Durcharbeitung des Lehrbuchs gibt der Verf. in der Einleitung eingehende Ratschläge, die insbesondere beim Selbststudium nützlich sein werden. Ebenso verdienen die „Indications Préliminaires", in denen Ziele und Methoden der Mechanik besprochen werden, die Beachtung aller am Gegenstand Interessierten. Schließlich sei noch das ausführliche Sachregister lobend erwähnt, denn leider verzichten die französischen Autoren in der Regel auf diese für die Benutzung eines Lehrbuchs so wesentliche Bequemlichkeit. *J. Radon*, Wien

Le problème de mécanique rationelle à l'agrégation. Von *R. Guyon*. 255 S. Paris: Librairie Vuibert. 1954. ffr. 2000.—.

Das Buch enthält eine Sammlung von Aufgaben, die in den Jahren 1932 bis 1952 bei dem Examen der „Agrégation" aus dem Gebiet der Mechanik gestellt wurden, mit den ausführlichen Lösungen. Vorangestellt sind vier Noten des Verf., die sich hauptsächlich mit der Ausdehnung der Lagrangeschen Gleichungen auf Probleme mit Stoß und Reibung befassen. Die Durcharbeitung der recht schwierigen Aufgaben an Hand des Buches ist ohne Zweifel sehr geeignet, das Verständnis und die Anwendung der allgemeinen Theorie in hohem Grad zu fördern. Ein Beispiel möge die Art der Aufgaben illustrieren: eine masselose Hohlkugel rollt auf einer horizontalen Ebene, im Inneren befindet sich eine schwere homogene konzentrische Kugel, die um einen Durchmesser reibungslos drehbar ist, dessen Enden in der Hohlkugel fixiert sind. *J. Radon*, Wien

The Kinematics of Vorticity. Von *C. Truesdall*. (Indiana University Publications Science Series: Nr. 19.) XVII, 232 S. Bloomington: Indiana University Press. 1954. $ 6.—.

Dieses Werk, von dem hervorragenden Fachmann auf diesem Gebiet geschrieben, ist wohl das erste, das eine systematische und einwandfreie Darstellung des gesamten Stoffes gibt. In jedem Buch über theoretische Physik finden sich Abschnitte über die Kinematik der Wirbel, aber die Darstellung ist nicht immer einwandfrei. Viele Sätze, die als Sätze der Dynamischen Theorie der Flüssigkeiten angesehen werden, sind rein kinematischer Natur. Dieses ganze Gebiet, welches von *Euler* und *Cauchy* begründet wurde, ist auch heute bei weitem noch

nicht erschöpft, was z. B. die letzten vier Kapitel besonders deutlich zeigen. Der Verfasser ist um eine sorgfältige und klare Darstellung bemüht, was gerade hier auf einem Gebiet, das reich an Formeln wie an Fallgruben ist, nicht leicht ist. Besonders hervorzuheben ist das bis ins Einzelne genaue Eingehen auf die historische Entwicklung. Irrtümer in dieser Hinsicht werden richtig gestellt. So nennt der Verfasser den „Stokeschen Integralsatz so, wie er richtig heißen müßte, „Transformation von *Kelvin*", weist aber darauf hin, daß der Satz auch unabhängig davon, von *Hankel* aufgestellt wurde. Die Verdienste von *Euler* werden besonders hervorgehoben. Das Gebiet, welches der Verfasser durch wichtige Untersuchungen gefördert hat, hat durch das vorliegende Buch ein Standardwerk erhalten.

E. Hlawka, Wien

Die Grundlagen der Quantenmechanik. Von *G. Ludwig*. („Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete". Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt und B. L. van der Waerden: Band LXX.) Mit 52 Textabb., XII, 460 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 49.—, geb. DM 52.60.

Der Verfasser behandelt in diesem Buch sowohl die begrifflichen Grundlagen der Theorie in physikalischer Hinsicht (dies bildet den ersten Teil des Werkes), wie in mathematischer Hinsicht, indem im ersten Teil die Theorie der linearen Operatoren im Hilbertschen Raum im Vordergrund steht, während der zweite Teil (Theorie der Spektren, chemische Bindung) von der Darstellungstheorie der Gruppen beherrscht wird. Ausführliche Anhänge entwickeln die Theorie des Hilbertschen Raumes, Maßtheorie, Darstellungstheorie endlicher wie kontinuierlicher Gruppen, sowohl in endlich dimensionalen Räumen, wie im Hilbertschen Raum. Dabei sei hervorgehoben, daß diese Dinge nicht referiert, sondern bewiesen werden. Der Verfasser setzt nur die üblichen mathematischen Vorkenntnisse, wie sie die Anfängervorlesungen bringen, voraus. Er ist mit Recht der Ansicht, daß eine physikalische Theorie nur dann restlos verstanden werden kann, wenn man den benötigten mathematischen Apparat beherrscht. (Es gibt auch in der Physik keinen Königsweg.) Im besonderen Maß trifft dies für die Quantentheorie zu und nur so ist es möglich, die Quantenmechanik systematisch darzustellen. Es steht aber dabei in diesem Buch immer das Physikalische im Vordergrund. So wird die Problematik des Meßprozesses von allen Seiten beleuchtet und in dem Kapitel „Quantentheorie und physikalisches Weltbild" werden die philosophischen Konsequenzen gezogen. Das Buch, das viele originelle Beiträge des Verfassers enthält, ist außerordentlich klar geschrieben. Ein hervorragendes Werk!

E. Hlawka, Wien

Schwingende Kristalle. Von *L. Bergmann*. Dritte Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Band 93.) 52 S. Stuttgart: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1953. DM 2.60.

Das durch 7 Jahre vergriffene Büchlein erscheint jetzt wieder mit kleinen Zusätzen und Verbesserungen. Es beginnt mit den piezoelektrischen Erscheinungen und behandelt die schwingenden Kristalle sowie ihre Anwendungen auf Elektrotechnik und Ultraschall. Die Grundversuche wurden eingehend behandelt, das andere konnte mit Rücksicht auf den geringen Umfang vielfach nur angedeutet werden. Ein Literaturnachweis bildet den Schluß des Büchleins.

J. Lewandowski, Wien

Technische Kunstgriffe bei physikalischen Untersuchungen. Von *E. v. Angerer*. Herausgegeben von *H. Ebert* unter Mitarbeit zahlreicher Fachwissenschaftler. Neunte Auflage. Mit 134 Textabb., VIII, 368 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1954. DM 14.80.

Gegenüber der achten Auflage (siehe die Besprechung in Monatshefte **56**, 358 (1952)) wurde das beliebte Buch um ein Kapitel „Akustik" erweitert, welches Schallsender, Schallempfänger, Schallaufzeichnung, Raumakustik und echofreie Räume behandelt. Selbstverständlich wird auch auf die Erzeugungs- und Meßmethoden für Ultraschall eingegangen. Die Kenntnis technischer Kunstgriffe bringt oft erhebliche Ersparnis an Zeit und Arbeit mit sich, so daß sicherlich auch diese neue Auflage großen Anklang finden wird. *K. Prachar*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29.

Methoden und Probleme der Wettervorhersage.

Von Dr. **Heinz Reuter,** Privatdozent an der Universität Wien, Observator an der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien. Mit 46 Textabbildungen. VIII, 161 Seiten. 1954. Ganzleinen S 132.—, DM 22.—, $ 5.25, sfr. 22.60

In den letzten Jahren sind neue, wichtige Erkenntnisse über den Mechanismus der atmosphärischen Vorgänge errungen worden, die für die Methodik der Wettervorhersage große Bedeutung gewonnen haben. Die moderne Entwicklung in Europa und Amerika findet ihren sichtbaren Ausdruck nicht zuletzt in der Ableitung objektiver rechnerischer Methoden für die Konstruktion von Vorhersagekarten des Boden- und Höhendruckfeldes, wodurch die eigentliche Wettervorhersage eine verläßliche und objektive Grundlage gewinnt. Erstmalig bringt das Buch von *Reuter* eine zusammenfassende Darstellung dieser Methoden sowie der aktuellen Probleme der Wettervorhersage im allgemeinen.

Aufgaben aus der Hydromechanik.

Von Dr. **Karl Federhofer,** o. Professor an der Technischen Hochschule Graz. 245 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 235 Textabbildungen. V, 221 Seiten. 1954.

Steif geheftet S 144.—, DM 24.—, $ 5.70, sfr. 24.50
Ganzleinen S 162.—, DM 27.—, $ 6.45, sfr. 27.70

Die wenigen deutschsprachigen Lehrbücher für Hydromechanik enthalten im Gegensatze zu den im angelsächsischen Schrifttum in reicher Auswahl erschienenen Lehrbüchern nur wenige oder gar keine Übungsbeispiele. Den Studierenden fehlt daher ein Übungsbehelf beim Studium der Hydromechanik. Das Buch enthält in 14 Abschnitten 245 Aufgaben verschiedener Schwierigkeitsgrade aus der Mechanik ruhender und bewegter unzusammendrückbarer Flüssigkeiten. Die Aufgaben behandeln außer der Hydrostatik die eindimensionale Hydraulik, das Gebiet der ebenen und achsensymmetrischen Strömungen reibungsfreier Flüssigkeiten, sowie Grundwasserströmungen und Flüssigkeitsschwingungen.

Einführung in die Untersuchung der Kristallgitter mit Röntgenstrahlen.

Eine elementare Darlegung der Methoden mit Aufgaben. Von **Friedrich Trey,** Dr. phil., a. o. Professor für Physik an der Montanistischen Hochschule Leoben, und **Wilhelm Legat,** Dr. phil., Assistent an der Lehrkanzel für Physik der Montanistischen Hochschule Leoben. Mit 67 Textabbildungen und 1 Nomogramm. VI, 113 Seiten. 1954.

Steif geheftet S 75.—, DM 12.50, $ 3.—, sfr. 12.80

„This small book is very clearly written in an easy style with short sentences. Three chapters deal with the diffraction of X-rays by 1-, 2- and 3-dimensional lattices respectively, and are well illustrated with geometrical diagrams, together with accompanying formulae. Various problems with answers include explanations how to index and deduce the unit-cell dimension of cubic crystals from various types of photographs. A separate nomogram printed on cellophane gives a scale for the reciprocal lattice."

Mineralogical Magazine